ИЗДАТЕЛЬСТВО «УЧИТЕЛЬ»

АЛГЕБРА

10 класс

для преподавателя

Издательство «Учитель»

АЛГЕБРА

(поурочные планы)

для 10 класса

Составители: Т. Л. Афанасьева
Л. А. Тапилина

Волгоград

Охраняется законом об авторском праве. Воспроизведение всего пособия или любой его части, а также реализация тиража запрещается без письменного разрешения издателя. Любые попытки нарушения закона будут преследоваться в судебном порядке.

© АЛГЕБРА
(поурочные планы)
для 10 класса, 1998

© Составители: **Т. Л. Афанасьева**
Л. А. Тапилина
Ответственные за выпуск: **Л. Е. Гринин**
Л. Н. Ситникова
Редактор **Л. Н. Ситникова**
Корректор **В. Н. Филиппова**

© Издательство «Учитель»
400079, Волгоград, п/о 79, а/я 36
Лицензия ЛР № 060709 от 13.02.97

ISBN 5-7057-0112-8

Отпечатано в Государственном унитарном полиграфическом предприятии «Калачевская типография»
Бумага газетная. Печать офсетная. Формат 84x60, 1/16.
Заказ 648. Тираж 7 000. 404520, г. Калач-на-Дону, ул. Кравченко, 7.

Колмогоров А. Н., Абрамов А. М., Дудницын Ю. П. и др. Алгебра и начала анализа 10 - 11: М.: Просвещение, 1990 и последующие издания.

(2 ч в неделю в I полугодии, 3 ч в неделю во II полугодии, всего 85 ч)

I полугодие

§ 1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА (7 ч)

СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС. ПОВТОРЕНИЕ (3 ч)

УРОК № 1

Цели: повторить изученные ранее единицы измерения угловых величин; вспомнить определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса числового аргумента; закрепить изученное в ходе выполнения упражнений.

Ход урока

I. Повторение изученного ранее материала

1. Единицы измерения угловых величин: d (величина прямого угла), градус, радиан; еще другие единицы - град, угловой час, румб и др.

2. Радианная мера (рис. 1).

π рад. – 180^0 1 рад. = $\frac{180^0}{\pi}$;

α рад. – n^0 $1^0 = \frac{\pi}{180}$ рад.

$\boxed{n^0 = \frac{180 \cdot \alpha}{\pi}}$ - переход от радианной меры угла к градусной.

$\boxed{\alpha \text{ рад.} = \frac{\pi \cdot n}{180}}$ - переход от градусной меры к радианной мере угла.

3. При радианном измерении углов упрощается ряд формул:

а) длина дуги $l = \alpha r$ (1)

б) площадь сектора $S = \dfrac{\alpha r^2}{2}$ (2)

4. Повторить, как определяется поворот на угол в α радиан.

5. Вспомнить определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса α (α – угол или число).

6. Разобрать пример 1 по учебнику (по рис. 2).

7. Рассмотреть таблицу значений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$, где $0 \le \alpha \le 2\pi$.

II. Выполнение упражнений

1. Решить № 1(в; г).
2. Решить № 2(в; г).
3. Решить № 3 (использовать таблицу).
4. Устно № 4(в; г).

Указание:

D(sin) = R; E(sin) = [-1; 1];

D(cos) = R; E(cos) = [-1; 1].

D(tg) - множество всех чисел x, для которых $\cos x \ne 0$, т.е. все числа x, не равные $\dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

E(tg) = $(-\infty; +\infty)$.

5. Решить № 18(в; г) и № 19(в; г).

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание

1. Из § 1 п. 1; решить № 1(а; б); № 2(а; б); № 18(а; б); №19(а; б).
2. По учебнику «Алгебра 9» повторить основные формулы тригонометрии.

УРОК № 2

Цели: повторить основные формулы тригонометрии и закрепить их знание в ходе выполнения упражнений.

Ход урока

I. Устная работа

1. Радианная мера двух углов треугольника равна $\dfrac{\pi}{3}$ и $\dfrac{\pi}{6}$. Найдите градусную меру каждого из углов треугольника. Ответ: 60°, 30°, 90°.

2. Найдите радианную меру углов треугольника, если их величины относятся как 2:3:4. Ответ: $\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}$.

3. Может ли косинус быть равным: а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, б) $\frac{\pi}{3}$, в) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$, г) $\frac{3}{\pi}$, д) $\sqrt{3}-2$?

Ответ: а) да; б) нет; в) нет; г) да; д) да.

4. Может ли синус быть равным: а) $-3{,}7$, б) $\frac{\sqrt{30}}{6}$, в) $\frac{3\pi}{4}$?

Ответ: а) нет; б) да; в) нет.

5. При каких значениях a и b справедливы следующие равенства:

а) $\cos\alpha = \frac{a}{7}$; б) $\sin\alpha = \frac{\pi}{a}$; в) $\cos x = \sqrt{a}$; г) $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{10}$; д) $\sin x = \pi a$?

Ответ: а) $|a| \le 7$; б) $|a| \ge \pi$; в) $0 \le a \le 1$; г) b - любое число; д) $-\frac{1}{\pi} \le a \le \frac{1}{\pi}$.

II. Изложение материала – лекция

1. Основные тригонометрические тождества.
2. Формулы сложения.
3. Формулы приведения.
4. Формулы суммы и разности синусов (косинусов).
5. Формулы двойного аргумента.
6. Формулы половинного аргумента.

III. Работа по учебнику

Учащиеся самостоятельно разбирают решение примеров 2, 3 и 4 (без записи в тетрадях).

IV. Закрепление материала

1. Решить № 5(б; г) и № 6 (устно).
2. Решить № 7(а; б).
3. Решить № 8 (самостоятельно).
4. Вывести формулы тройных углов:

а) $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos^2\alpha +$

$+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha = 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha = 2\sin\alpha -$

$-2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$

$$\boxed{\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.}$$

б) $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha = (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha -$

$-2\sin^2\alpha\cos\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha -$

$-2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$

$$\boxed{\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.}$$

в) $\mathrm{tg}3\alpha = \mathrm{tg}(2\alpha+\alpha) = \dfrac{\mathrm{tg}2\alpha + \mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}2\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha} = \dfrac{\dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} + \mathrm{tg}\alpha}{1-\dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}\mathrm{tg}\alpha} = \dfrac{2\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha - 2\mathrm{tg}^2\alpha} =$

$= \dfrac{3\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha}.$

$$\boxed{\mathrm{tg}3\alpha = \frac{3\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha}.}$$

5*. Известно, что $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$. Вычислить $\mathrm{tg}5\alpha$.

Решение. $\mathrm{tg}5\alpha = \mathrm{tg}(2\alpha+3\alpha) = \dfrac{\mathrm{tg}2\alpha + \mathrm{tg}3\alpha}{1-\mathrm{tg}2\alpha\cdot\mathrm{tg}3\alpha}.$

$\mathrm{tg}2\alpha = \dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{4}{3}$; $\mathrm{tg}3\alpha = \dfrac{3\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{8}}{1-3\cdot\frac{1}{4}} = \dfrac{11}{2}$; $\mathrm{tg}5\alpha = \dfrac{\frac{4}{3} + \frac{11}{2}}{1-\frac{4}{3}\cdot\frac{11}{2}} = -\dfrac{41}{38}.$

Ответ: $\mathrm{tg}5\alpha = -\dfrac{41}{38}.$

V. Итоги урока

VI. Домашнее задание: из § 1 п. 1 и п. 2; решить № 9, № 10(а), № 11, № 12.

УРОК № 3

Цели: способствовать усвоению основных формул тригонометрии в ходе решения задач.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания

1. Двое учащихся по карточкам работают на доске:

Карточка № 1

1. Докажите справедливость равенства
$\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 2.$
2. Вычислите $4\sin 7^0 30' \cos 7^0 30' \sin 75^0$. Ответ: 0,5.

Карточка № 2

1. Докажите тождество $\cos(\pi - 2\alpha) = \sin(\pi - \alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$
2. Известно, что $\cos\alpha = \frac{7}{25}$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Найдите $\cos 2\alpha$; $\operatorname{tg} 2\alpha$.

   Ответ: $-\frac{527}{625}$; $\frac{336}{527}$.

2. С остальными учащимися работаем устно:

а) упростите выражения:

$(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)$; $\sin 30^0 \operatorname{ctg} 30^0 - \cos 30^0$; $\cos^2\alpha \operatorname{tg}^2\alpha + \sin^2\alpha \operatorname{ctg}^2\alpha$;

$1 + \sin(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; $(1-\sin 30^0)(1+\sin 30^0) + (1+\cos 30^0)(1-\cos 30^0)$;

$\cos\alpha\cos 3\alpha - \sin\alpha\sin 3\alpha$; $\sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha$;

б) найдите значение выражения:

$\operatorname{tg}1^0 \cdot \operatorname{tg}2^0 \cdot \operatorname{tg}3^0 \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg}87^0 \cdot \operatorname{tg}88^0 \cdot \operatorname{tg}89^0$; $\sin 40^0 \cos 5^0 + \cos 40^0 \sin 5^0$;

$\dfrac{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{15} - \operatorname{tg}\frac{2\pi}{15}}{1 + \operatorname{tg}\frac{7\pi}{15}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{15}}$; $\cos 75^0 + \cos 15^0$; $\sin 135^0 - \sin 45^0$.

II. Выполнение упражнений

1. Решить № 21(б; в)
2. Решить № 23(б; в)
3. Решить № 25(в; г)

} на доске и в тетрадях.

4. Вывести *формулы понижения степени*:

В формулах $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$ и $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$ заменим $\frac{\alpha}{2}$ на α.

В результате получим:

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2};\ \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2};\ \operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}.$$

5. *Выражение* sinα, cosα *и* tgα *через* $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ (№ 26):

а) имеем $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

Разделим на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ числитель и знаменатель полученной дроби, получим

$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ при $\alpha\neq(2k+1)\pi, k\in Z$;

б) запишем $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}$; разделим числитель

и знаменатель дроби на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$, имеем $\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$,

при $\alpha\neq(2k+1)\pi, k\in Z$;

в) $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, при $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z,\ \alpha\neq\pi+2\pi k, k\in Z$;

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}, \text{ при } \alpha \neq \pi k, k \in Z.$$

6*. *Секанс и косеканс.*

Символы $\sec\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$ служат для обозначения величин, обратных $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$:

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha, \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1); \ \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha};$$

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha, \alpha \neq \pi k; \ \sin\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha};$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha; \ 1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha.$$

7*. Доказать тождество $\left(\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}\right)^2 = \frac{\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

Решение.

Тождество будет доказано, если установить, что разность между выражениями, стоящими в левой и правой частях этого равенства, равна нулю:

$$\left(\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}\right)^2 - \frac{\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \left(\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}\right)^2 - \frac{\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}} =$$

$$= \left(\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\frac{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}}\right)^2 - \frac{\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{\frac{\operatorname{tg}^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\alpha}} = (\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha)^2 - \sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\alpha = 0.$$

Тождество доказано.

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание: повторить п. 1 (формулы), решить № 23(а; г), № 25(а; б); № 27.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1 НА 15-20 МИН. (4 Ч)

УРОК № 1

Урок – лекция с подачей опорного конспекта темы.

Цели: ввести определения тригонометрических функций и научить строить их графики.

Ход урока

I. Обьяснение нового материала

1. Определение единичной окружности (рис. 5 учебника).

Ордината точки P_α –это синус угла α, то есть $\sin\alpha = y$; абсцисса этой точки – косинус угла α, $\cos\alpha = x$.

2. Все углы измерены в радианной мере (рис. 6 учебника).

3. Определение функций синус и косинус.

4. *Область определения* функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ –множество всех действительных чисел: D(sin) = D(cos) = R.

5. *Область значений* функций синус и косинус – отрезок [–1; 1]:

E(sin) =E(cos) = [–1; 1].

6. *Чётность и нечётность функций*:

а) $\sin(-x) = -\sin x$, функция $y = \sin x$ нечётная;

б) $\cos(-x) = \cos x$, функция $y = \cos x$ чётная.

7. *Функции периодические* с наименьшим положительным периодом 2π, то есть $\sin(x+2\pi n) = \sin x$, $\cos(x+2\pi n) = \cos x$ для всех $x \in R$ (n - произвольное целое число).

8. *Нули функции*: $\sin x = 0$ при $x = \pi k$, $k \in Z$;

$$\cos x = 0 \text{ при } x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$$

9. *Промежутки, на которых функция принимает положительные значения* (рис. 4 учебника): $\sin x > 0$ для всех $x \in (2\pi k;\ \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$;

$$\cos x > 0 \text{ для всех } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z.$$

10. *Промежутки*, на которых функция принимает *отрицательные значения* (рис. 4 учебника): $\sin x < 0$ для всех $x \in (\pi + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$;

$$\cos x < 0 \text{ для всех } x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z.$$

11. *Наибольшее значение, равное* 1, функция $y = \sin x$ принимает в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; $y = \cos x$ принимает в точках $x = 2\pi k$, $k \in Z$.

12. *Наименьшее значение, равное* –1, функция $y = \sin x$ принимает в точках $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; $y = \cos x$ принимает в точках $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$.

13. Строим график функции синус на отрезке $[0; 2\pi]$, длина которого приближённо равна 6,28 (используем перечисленные выше свойства функции и рис. 7, рис. 8). График синуса называется синусоидой.

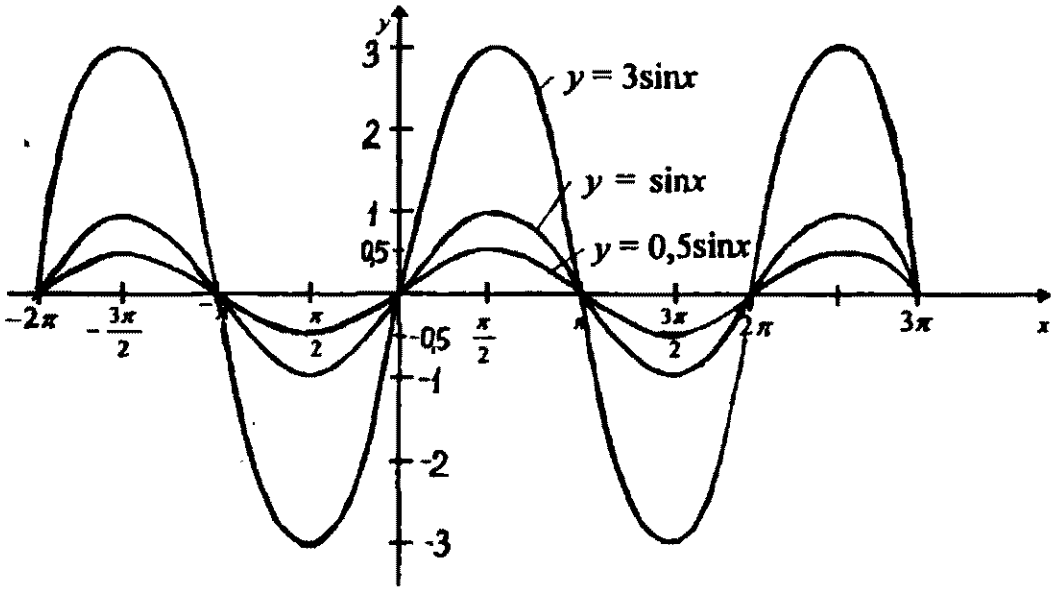
14. Строим график функции косинус, используя $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ (параллельный перенос графика синус на расстояние $\frac{\pi}{2}$ в отрицательном направлении оси OX, рис. 9).

15. Построить график функции: 1) $y = 3\sin x$; 2) $y = \frac{1}{2}\sin x$.

Решение:

а) Ордината графика $y = 3\sin x$ в 3 раза больше соответствующих ординат графика $y = \sin x$. Поэтому график заданной функции строится путём увеличения всех ординат исходного графика в 3 раза, т.е. путём растяжения исходного графика по оси OY в 3 раза;

б) $y = 0{,}5\sin x$. Сжатие исходного графика по оси OY в 2 раза.



II. Итоги урока

III. Домашнее задание: из п. 2 (1; 2); решить № 28, № 33(в), № 37(а), № 27(а; в).

УРОК № 2

Урок типовых задач.

Цели: закрепить изученный материал в ходе решения задач и построения графиков синуса и косинуса.

Ход урока

I. Устная работа

1. Решить по учебнику № 30(а; б) и № 32.

2. При каких значениях x на $[0; 2\pi)$ функция принимает наибольшее значение и чему оно равно: а) $y=3+\cos x$; б) $y=2-\sin x$.

Ответ: а) $y=4$ при $x=0$; б) $y=3$ при $x=\frac{3\pi}{2}$.

3. При каких значениях x на $[0; 2\pi)$ функция принимает наименьшее значение и чему оно равно: а) $y=3+\cos x$; б) $y=2-\sin x$.

Ответ: а) $y=2$ при $x=\pi$; б) $y=1$ при $x=\frac{\pi}{2}$.

II. Выполнение упражнений

1. Решить № 38(б; г).

Решение.

г) $y=\sin x-1$.

Пересечение с осью OX: $y=0$, то $\sin x-1=0$, $\sin x=1$ при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$, точка пересечения с осью абсцисс $(\frac{\pi}{2}+2\pi n; 0)$. Пересечение с осью OY: $x=0$, то $y=\sin 0-1=-1$, точка пересечения с осью ординат $(0; -1)$.

2. Решить № 39(б; в).

Решение.

в) $y=2,5+\cos x$.

С осью OX: $y=0$, $2,5+\cos x=0$, $\cos x=-2,5$ нет решений, т.к. область значений косинуса $[-1; 1]$. Значит, пересечения с осью абсцисс нет.

С осью OY: $x=0$, $y=2,5+\cos 0=2,5+1=3,5$. Точка пересечения с осью ординат $(0; 3,5)$.

3. Решить № 36(в).

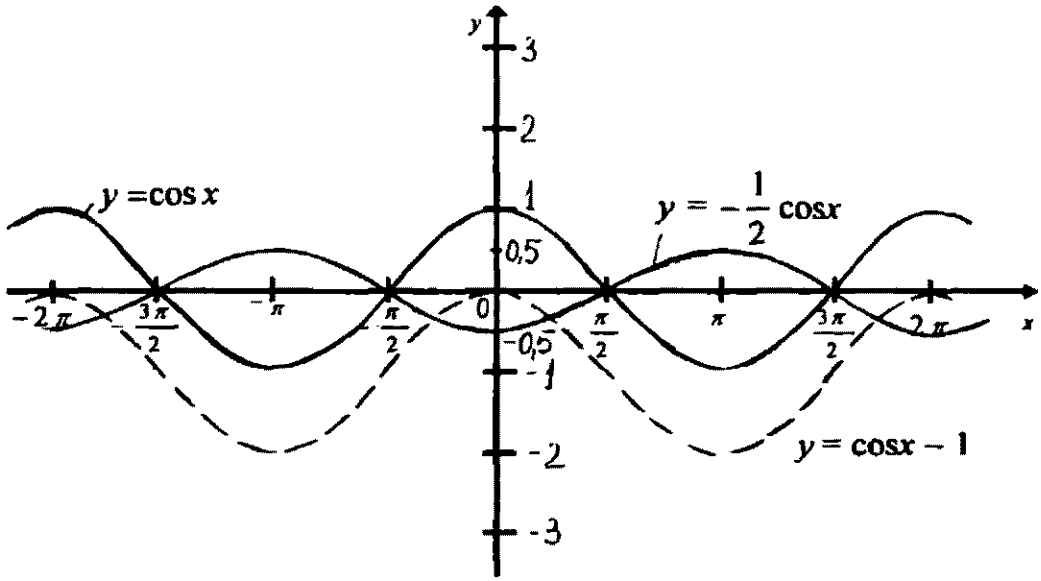
Решение.

$y = \cos x - 1$; $D(y) = R$; $E(y) = [-2; 0]$.

4. Решить № 37(г).

Решение.

$y = -\frac{1}{2}\cos x$; $D(y) = R$; $E(y) = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$. В одной системе координат строим графики функций $y = \cos x - 1$ и $y = -\frac{1}{2}\cos x$.

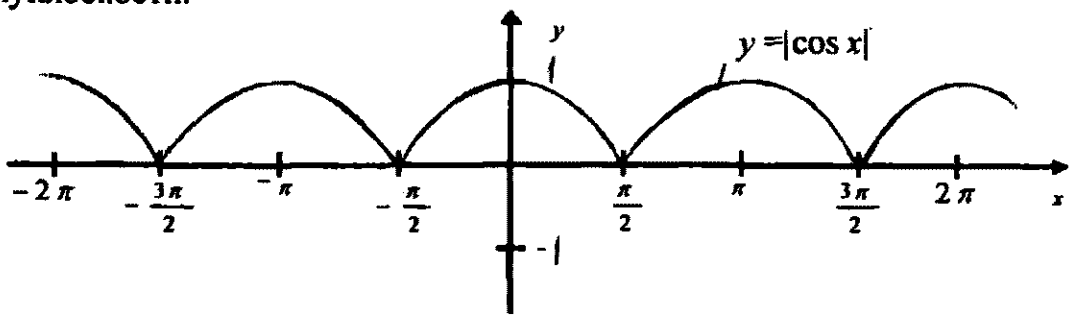


5. Построить графики функций $y = \cos|x|$ и $y = |\cos x|$.

Решение.

а) $y = \cos|x|$, $\cos|x| = \cos x$, т.к. $\cos x = \cos(-x)$. Следовательно, график данной функции тот же, что и график функции $y = \cos x$;

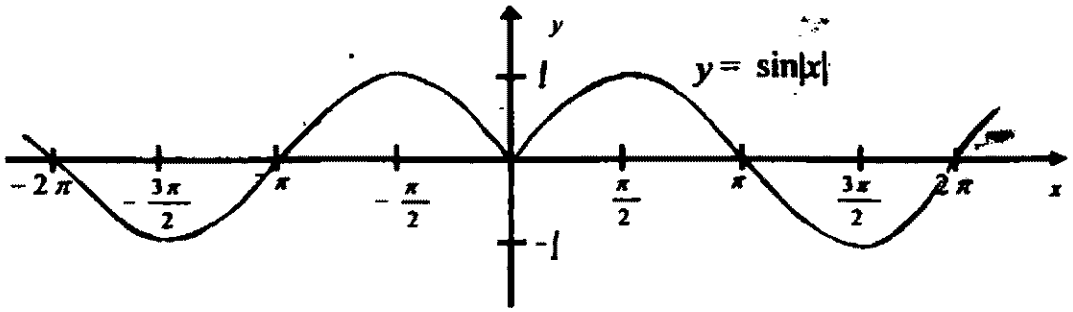
б) $y = |\cos x|$, при $\cos x \geq 0$ $y = \cos x$. Следовательно, на участке, где $\cos x \geq 0$, график будет тот же, что и график функции $y = \cos x$. При $\cos x < 0$ $y = -\cos x$. Следовательно, части графика функции $y = \cos x$, расположенные ниже оси абсцисс, зеркально отобразятся и будут расположены в верхней полуплоскости.



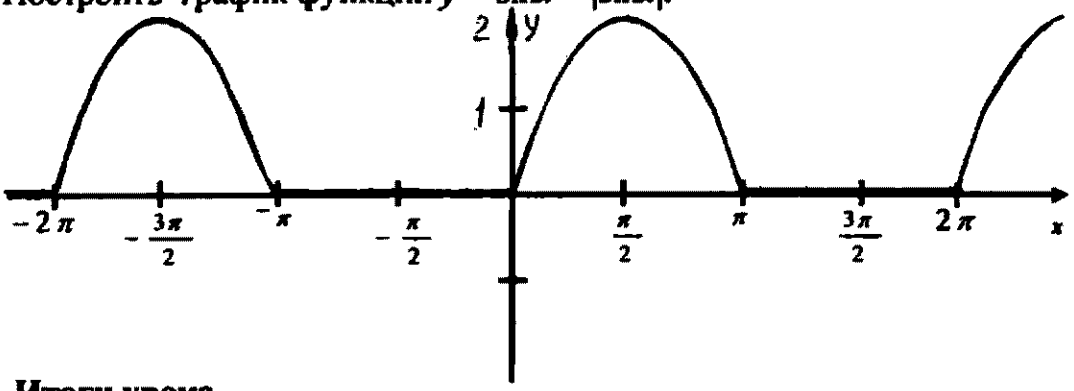
6. Построить графики функций $y = \sin|x|$ и $y = |\sin x|$.

Решение.

Чтобы построить график $y = \sin|x|$, надо построить сначала график $y = \sin x$ при $x > 0$, а затем построить кривую, симметричную с построенным графиком относительно оси ординат.



7*. Построить график функции $y = \sin x + |\sin x|$.



III. Итоги урока

IV. Домашнее задание: решить № 34, № 36(а), повторить изученный материал; № 37(г), № 7(в; г).

УРОК № 3

Цели: проверить усвоение учащимися изученного материала; изучить функции тангенс и котангенс и научить строить их графики.

Ход урока

I. Проверочная работа (10 – 12 мин.)

I вариант

1. Свойства функции $y = \sin x$ и её график.
2. Записать основные тригонометрические тождества.

II вариант

1. Свойства функции $y = \cos x$ и её график.
2. Записать формулы двойного аргумента.

II. Объяснение нового материала

1. Определение функций тангенс и котангенс.

2. Основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$:

а) область определения функции – множество всех действительных чисел, кроме чисел вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$;

б) множество значений $E(y) = (-\infty; +\infty)$, тангенс – функция неограниченная;

в) функция нечётная: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ для всех x из области определения;

г) функция периодическая с наименьшим положительным периодом π, т.е. $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$ для всех x из области определения;

д) $\operatorname{tg} x = 0$ при $x = \pi k, k \in Z$;

е) по рис. 4 $\operatorname{tg} x > 0$ для всех $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z$;

$\operatorname{tg} x < 0$ для всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right), k \in Z$.

3. Построение графика функции $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 10 и рис. 12; рис. 13 учебника).

4. Основные свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$:

а) область определения – множество всех действительных чисел, кроме чисел вида $\pi k, k \in Z$;

б) множество значений $E(y) = (-\infty; +\infty)$, котангенс – функция неограниченная;

в) функция нечётная: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$ для всех x из области определения;

г) функция периодическая с наименьшим положительным периодом π, то есть $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$ для всех x из области определения;

д) $\operatorname{ctg} x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$;

е) по рис. 4 учебника $\operatorname{ctg} x > 0$ для всех $x \in (\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k), k \in Z$;

$\operatorname{ctg} x < 0$ для всех $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k), k \in Z$.

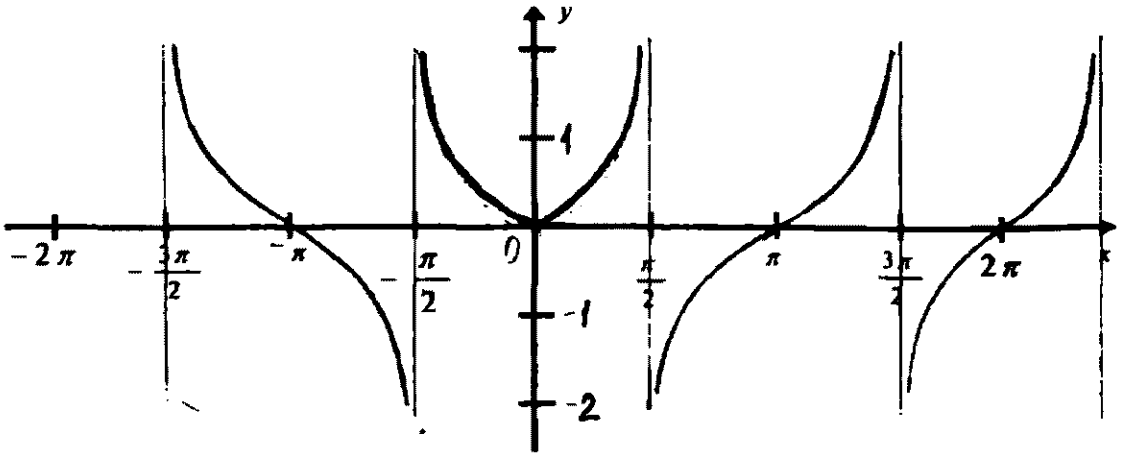
5. Строим график функции $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 14).

III. Закрепление изученного материала

1. Построить график функции $y=\mathrm{tg}|x|$.

Решение.

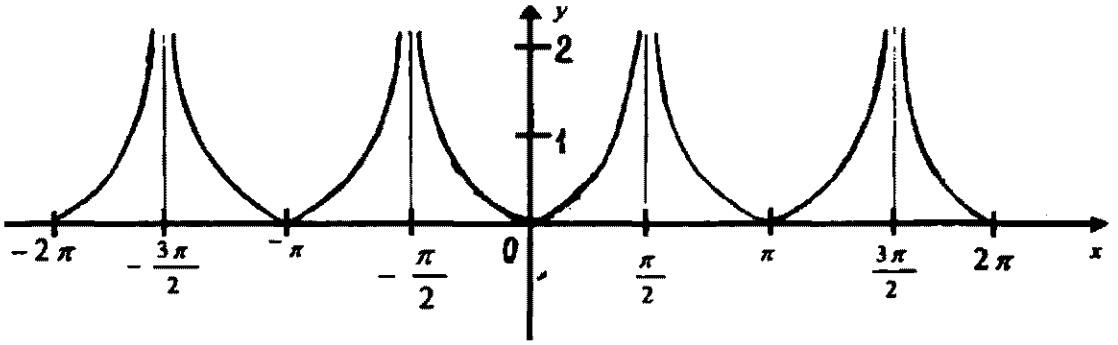
Функция чётная, так как $\mathrm{tg}|-x| = \mathrm{tg}|x|$. При $x > 0$ график искомой функции тот же, что и график функции $y = \mathrm{tg}x$.



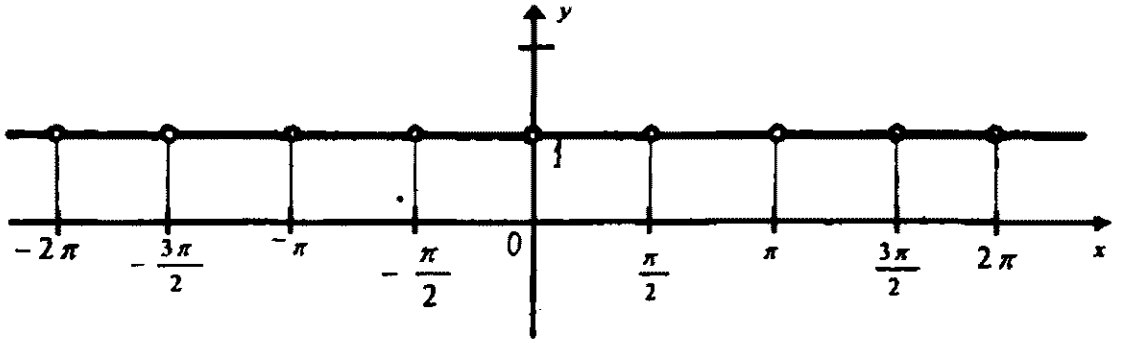
2. Построить график функции $y=|\mathrm{tg}x|$.

Решение.

Часть графика функции $y = \mathrm{tg}x$, расположенную в верхней полуплоскости, оставить без изменений, а часть графика, расположенную в нижней полуплоскости, зеркально отобразить относительно оси OX.



3. Построить график функции $y = \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{ctg}x$.



IV. Итоги урока

V. Домашнее задание: п. 2 из § 1; решить № 37(в); № 33(г); № 24; № 13.

УРОК № 4

Контрольная работа № 1 (15 –20 мин.).

Цели: закрепить изученный материал в ходе упражнений; проверить знания учащихся.

Ход урока

I. Организационный момент

1. Итоги проверочной работы.
2. Сообщить темы, на которые надо обратить внимание для успешного выполнения контрольной работы.

II. Выполнение упражнений

1. Дано: $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$; $180^0 < \alpha < 270^0$.

   Найдите: а) $\cos\alpha$, б) $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, в) $\mathrm{ctg}\,(\pi-\alpha)$.

2. Докажите тождество:

а) $16\sin^4\alpha - \left(\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha\right)^2 = 24\sin^2\alpha - 9$;

б) $\left(\mathrm{tg}\alpha - \sin\alpha\right)\cdot\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + \mathrm{ctg}\alpha\right) = \sin^2\alpha$; в) $\frac{2\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = -\mathrm{tg}\,2\alpha$.

3. Построить график функции $y = \mathrm{tg}x\cdot\cos x$. Указание: график данной функции – синусоида с исключёнными точками $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

III. Контрольная работа № 1 (15 –20 мин.)

I вариант

1. Дано: $\cos\alpha = -0{,}6$; $\pi < \alpha < 3\frac{\pi}{2}$. Вычислите: а) $\sin\alpha$; б) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.
2. Докажите тождество $\frac{2\sin^2\alpha}{\mathrm{tg}\,2\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.
3. Найдите область определения и область значений функции $y = -2\sin x$. Постройте её график.

II вариант

1. Дано: $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Вычислите: а) $\cos\alpha$; б) $\mathrm{ctg}\,(\pi - \alpha)$.

2. Докажите тождество $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{2\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\,2\alpha}$.

3. Найдите область определения и область значений функции $y=1-\cos x$. Постройте её график.

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание: повторить § 1; стр. 88, решить № 4 и № 9.

§ 2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ (17 ч)

ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ (3 ч)

УРОК № 1

Урок - лекция.

Цели: ввести понятия числовой функции, её области определения и области значений, понятие графика функции; рассмотреть геометрические преобразования графиков функций.

Ход урока

I. Анализ контрольной работы

Указать основные ошибки, допущенные при выполнении работы.

II. Изучение нового материала

1. Определение числовой функции.
2. Область определения $D(f)$ функции и область значений $E(f)$ функции.
3. Определение целых рациональных функций вида $f(x) = p(x)$, где $p(x)$ – многочлен, и определение дробно-рациональных функций вида

$f(x) = \frac{p(x)}{g(x)}$, где $p(x)$ и $g(x)$ – многочлены; их области определения.

4. График функции (рис. 15 и рис. 16 учебника).
5. Преобразование графиков:

а) параллельный перенос на вектор $(0; b)$ вдоль оси ординат:

$y = \sin x + 2$ (рис. 17); $y = x^2 - 5$ (рис. 18);

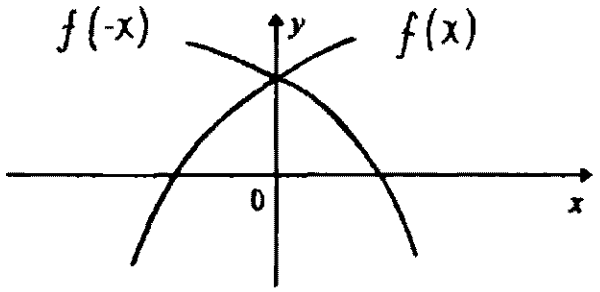
б) растяжение вдоль оси OY с коэффициентом k, которое задаётся форму-

лами $\begin{cases} x' = x, \\ y' = ky. \end{cases}$ (рис. 19, рис. 20 и рис. 21);

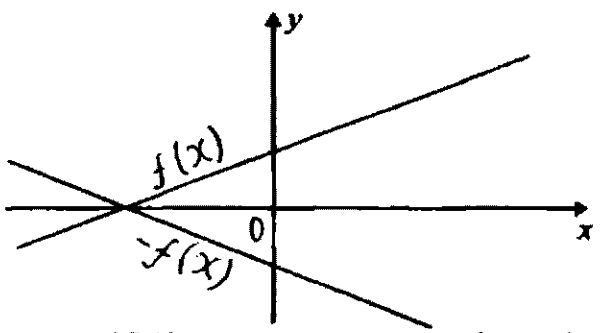
в) параллельный перенос вдоль оси абсцисс на вектор (a; 0) (рис. 22 и рис. 23);

г) растяжение вдоль оси OX с коэффициентом k, которое задаётся формулами $\begin{cases} x' = kx, \\ y' = y. \end{cases}$ (рис. 24 и рис. 25);

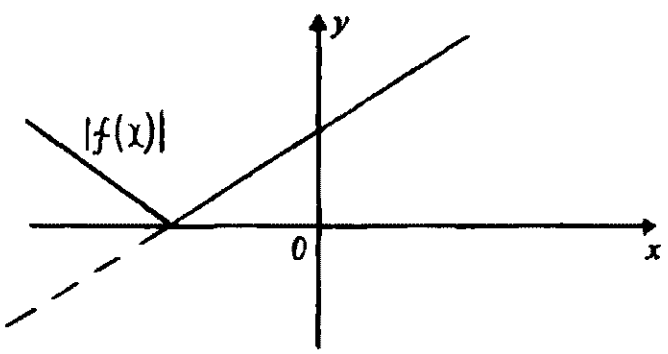
д) график функции $y = f(-x)$ получается симметричным отображением графика $f(x)$ относительно оси OY:



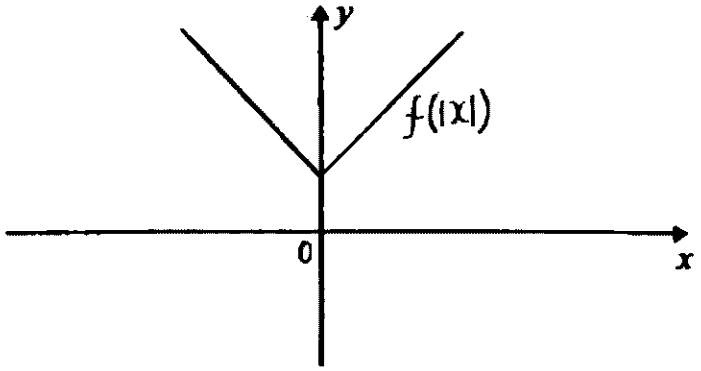
е) график функции $y = -f(x)$ получается симметричным отображением графика $f(x)$ относительно оси OX:



ж) график функции $y = |f(x)|$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: часть графика $y = f(x)$, лежащая над осью OX, сохраняется, часть его, лежащая под осью OX, отображается симметрично относительно оси OX:



з) график функции $y=f(|x|)$ получается из графика функции $y = f(x)$ так: при $x \geq 0$ график $y = f(x)$ сохраняется, а при $x < 0$ полученная часть графика отображается симметрично относительно оси OY:



III. Итоги урока

IV. Домашнее задание: из § 2 п. 3, решить № 40, № 46, № 48(б; в).

УРОК № 2

Цели: учить учащихся строить графики функций, используя различные геометрические преобразования; повторить решение квадратных уравнений и неравенств при нахождении области определения функции.

Ход урока

I. Работа по учебнику

1. Проверить решение № 46 (устно по рис. 27).
2. Устно решить № 42 (по рис. 26).
3. Решить на доске № 47.

II. Выполнение упражнений

1. Найти область определения функции № 53(б; г).

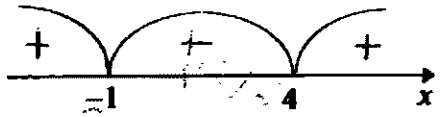
б) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{16 - x^2}$.

Решение.

Область определения функции – все значения переменной x, удовлетворяющие системе $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0, \\ 16 - x^2 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0, \\ x \neq -4 \text{ и } x \neq 4. \end{cases}$

Решим неравенство $x^2 - 3x - 4 \geq 0$ методом интервалов:

$x^2 - 3x - 4 = 0$, $D = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25$, $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, $(x+1)(x-4) \geq 0$



$x \leq -1$ и $x \geq 4$.

Решение системы $\begin{cases} x \leq -1 \text{ и } x \geq 4, \\ x \neq -4 \text{ и } x \neq 4; \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -1$, кроме $x = -4$ и $x > 4$.

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (-4; -1] \cup (4; +\infty)$.

г) Решить самостоятельно.

2. Устно решить № 51(а; в).

3. Постройте графики функций

а) № 48(а).

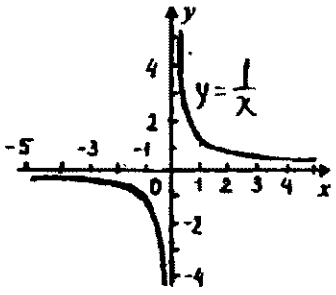
Решение.

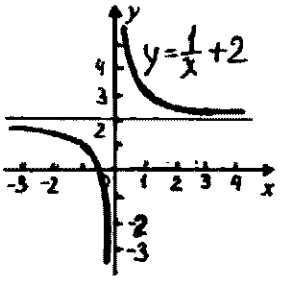
$y = \frac{1}{x}$

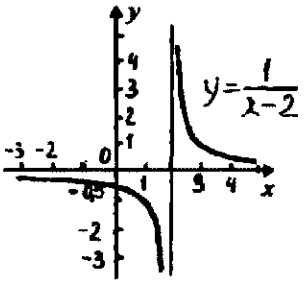
x	–5	–2	–1	–0,5	0,5	1	2	5
y	–0,2	–0,5	–1	–2	2	1	0,5	0,2

$y = \frac{1}{x} + 2$ переносим график функции $y = \frac{1}{x}$ вверх по оси OY на 2 единицы.

$y = \frac{1}{x-2}$ переносим график функции $y = \frac{1}{x}$ в положительном направлении оси абсцисс (вправо) на 2 единицы.

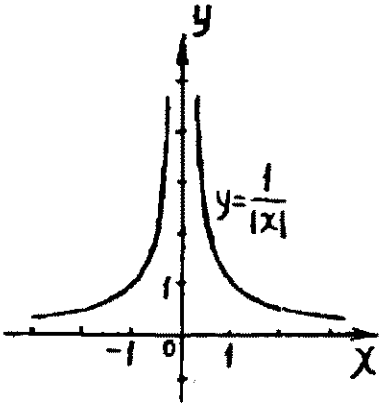


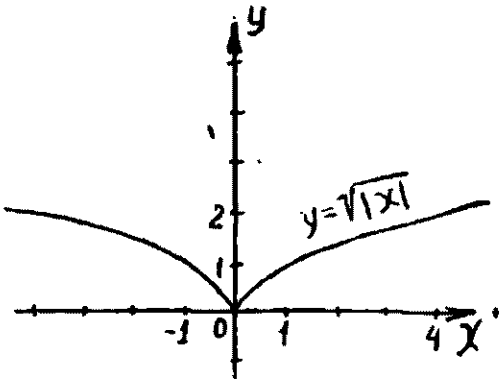


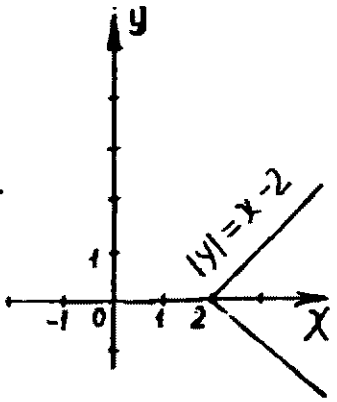


б) построить графики функций $y = \frac{1}{|x|}$; $y = \sqrt{|x|}$; $|y| = x - 2$.

Решение.





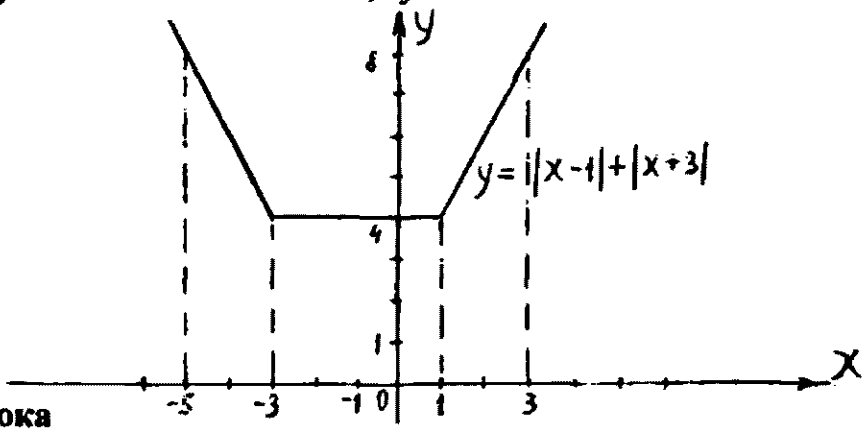


в)* построить график функции $y = |x - 1| + |x + 3|$.

Решение.

Находим значения переменной, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль: $x - 1 = 0$ или $x + 3 = 0$;
$x = 1$ или $x = -3$.

1) при $x < -3$, $y = -x + 1 - x - 3 = -2x - 2$; $y = -2x - 2$;
2) при $-3 \le x < 1$, $y = -x + 1 + x + 3 = 4$; $y = 4$;
3) при $x \ge 1$, $y = x - 1 + x + 3 = 2x + 2$; $y = 2x + 2$.



III. Итоги урока

IV. Домашнее задание: решить № 43, № 49(а), № 53(а; в), № 55(а).

УРОК № 3

Цели: закрепить изученный материал в ходе выполнения упражнений и построения графиков функций.

Ход урока

I. Устная работа

1. № 44 и № 51(б; г).
2. Привести пример аналитически заданной функции, определённой:

а) на всей числовой прямой;

б) на всей числовой прямой, кроме точки $x = 2$;

в) на всей числовой прямой, кроме точек $x = \pm 1$;

г) на $[0; +\infty)$;

д) на $[-2; 2]$.

Ответ: а) $f(x) = x^2 + 2x - 3$; б) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$; в) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$; г) $f(x) = \sqrt{x}$;

д) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

II. Построение графиков функций

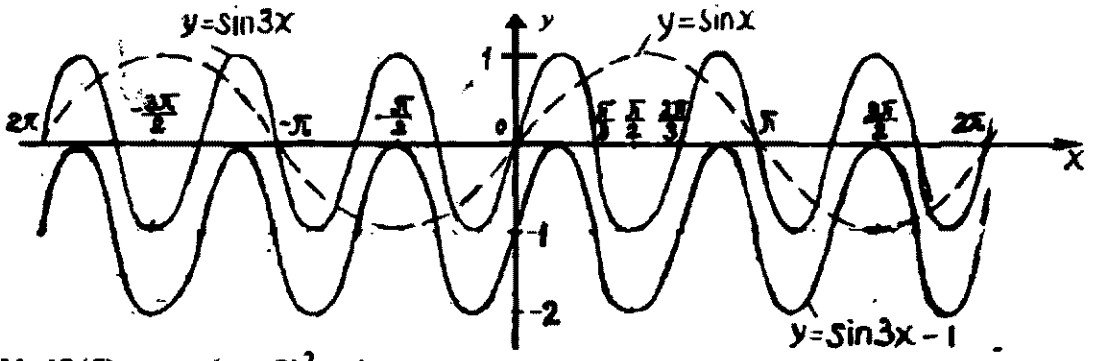
1. № 55(б).
2. № 56(а). $y = \sin 3x - 1$.

Решение:

а) строим график $y = \sin x$;

б) сжимаем по оси OX исходный график $y = \sin x$ в 3 раза;

в) переносим график $y = \sin 3x$ вниз по оси OY на 1 единицу.



3. № 49(б). $y = (x - 2)^2 - 4$.

Указание: воспользоваться шаблоном параболы $y = x^2$.

III. Самостоятельная работа (15 минут)

Вариант 1

1. Найти область определения функции f, заданной формулой:

а) $f(x)=\frac{3}{x^2-4}$; б) $f(x)=\frac{\sqrt{-x}}{3x^2-6}$.

Ответ: а) $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$; б) $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(-\sqrt{2};0\right]$.

2. Дана функция $f(x) = 3\cos 2x - 1$.

Найдите: а) $f(\pi)$; б) $f(\frac{\pi}{4})$; в) $f(-\frac{\pi}{3})$.

Ответ: а) 2; б) –1; в) –2,5.

3. Построить график функции $y = \sin x + 2$.

Вариант 2

1. Найдите область определения функции f, заданной формулой:

а) $f(x)=\frac{5}{3x^2-2x}$; б) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{2x^2-5}$.

Ответ: а) $(-\infty;0)\cup\left(0;\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$; б) $\left[0;\sqrt{2,5}\right)\cup\left(\sqrt{2,5};+\infty\right)$.

2. Для функции $f(x) = 2\sin 3x + 1$ найдите: а) $f(0)$; б) $f(\frac{\pi}{6})$; в) $f(-\frac{\pi}{4})$.

Ответ: а) 1; б) 3; в) $-\sqrt{2}+1$.

3. Постройте график функции $y = \cos x + 1$.

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание

1. Решить № 56(в), № 55(г), № 49(в).
2. Задание*: построить график функции $y = (\sin x - \cos x)^2$.
   Указание: после упрощения получим $y = 1 - \sin 2x$.

ЧЁТНЫЕ И НЕЧЁТНЫЕ ФУНКЦИИ. ПЕРИОДИЧНОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ (4 ч)

УРОК № 1

Цели: рассмотреть понятия чётной и нечётной функций, расположение их графиков; способствовать развитию навыков построения графиков функций.

Ход урока

I. Анализ самостоятельной работы

II. Объяснение нового материала

1. Определение чётной и нечётной функций.
2. Графики чётной и нечётной функций (рис. 30 и рис. 31).
3. Рассмотреть примеры 2 и 3 учебника на стр. 31 (рис. 32 и рис. 33).
4. Не всякая функция является чётной или нечётной (пример 4). Например, каждая из функций $y = 12x + 1$, $y = x^4 + x$, $y = (x + 3)^2$ не является ни чётной, ни нечётной.

III. Закрепление изученного материала

1. Выяснить чётность или нечётность функции (объясняет учитель):

а) $f(x) = x^7\cos 5x$.

Решение.

$D(f) = R$. $f(-x) = (-x)^7 \cdot \cos 5(-x) = -x^7\cos 5x = -(x^7\cos 5x) = -f(x)$.

Значит, $f(x) = x^7\cos 5x$ нечётная функция.

б) $y = (x - 3)^2 + (x + 3)^2$.

Решение.

$D(y) = R$. Переменим знак у аргумента функции и упростим:

$$y(-x) = (-x-3)^2 + (-x+3)^2 = (-(x+3))^2 + (-(x-3))^2 = (-1)^2(x+3)^2 +$$

$$+(-1)^2(x-3)^2 = (x-3)^2 + (x+3)^2 = y(x)$$ – функция чётная.

в) $y = x^2 - x + 3$.

Решение.

$D(y) = R$. $y(-x) = (-x)^2 - (-x) + 3 = x^2 + x + 3$ – функция не является ни чётной, ни нечётной.

2. Решить № 57(б; г) и № 60(б; в) на доске и в тетрадях.
3. Самостоятельно решить № 57(а; в) и № 59(а; б).
4. Решить № 61 (по рис. 37, а–г построить графики чётной и нечётной функций).

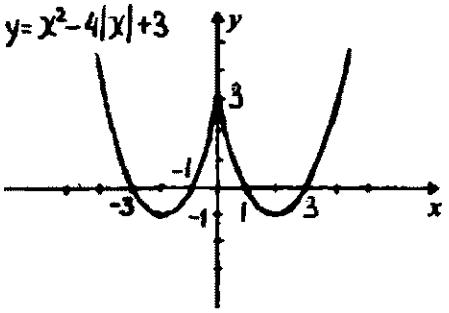
5*. Построить графики функций: а) $y = x^2 - 4|x| + 3$; б) $y = |x^2 - 4|x| + 3|$.

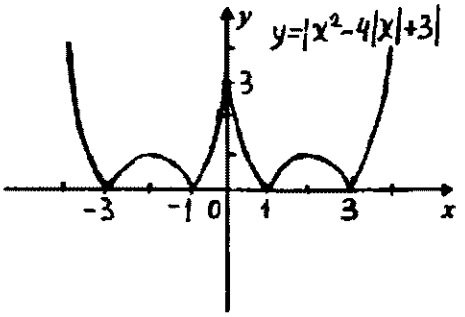
Решение.

а) $y = x^2 - 4|x| + 3$.

Строим график функции $y = x^2 - 4x + 3$ для $x \geq 0$, а затем кривую, симметричную с построенным графиком относительно оси OY (учитываем, что $x^2 = |x|^2$).

б) $y = |x^2 - 4|x| + 3|$. Те части графика $y = x^2 - 4|x| + 3$, где $y < 0$, отображаем симметрично относительно оси OX.





IV. Итоги урока

V. Домашнее задание: из § 2 п. 4 (1); решить № 58, № 59(в; г), № 60(а; г), № 74(в).

УРОК № 2

Цели: закрепить изученный материал о чётных и нечётных функциях; учить построению графиков функций.

Ход урока

I. Повторение изученного материала

1. Дайте определение чётной и нечётной функции.
2. Как расположены на координатной плоскости графики чётной и нечётной функции?
3. Какие из данных функций являются чётными, а какие нечётными (устно): а) $y = \cos^3 x$; б) $y = \sin^2 x$; в) $y = \sin^3 x$; г) $y = \mathrm{tg}^3 x$; д) $y = 2\sin x$; е) $y = -\cos x$; ж) $y = -\mathrm{tg}x$; з) $y = \mathrm{ctg}3x$?
4. Упростите выражения (устно): а)$\cos(-x)\mathrm{tg}(-x)$; б) $\mathrm{tg}(-x)\mathrm{ctg}(-x)$; в) $\cos(-x)\mathrm{ctg}x$; г) $\sin(-x)\mathrm{ctg}x$; д) $\sin(-x)\cos(-x)$; е) $1 + \mathrm{tg}(x)\cdot\mathrm{ctg}(-x)$.
5. Найдите значения тригонометрических функций углов (устно):

а) -30^0; б) -45^0; в) -60^0; г) $-\frac{\pi}{2}$.

II. Выполнение упражнений

1. На доске и в тетрадях:

а) решить № 70;

б) исследовать на чётность и нечётность функции:

$y = x - 2|x|$ (Ответ: ни чётная, ни нечётная); $y = 3x^2 + 4|x| - 5$ (Ответ: чётная); $y = \frac{2x}{x^2 + |x| + 1}$ (Ответ: нечётная); $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$ (Ответ: ни чётная, ни нечётная).

2. Самостоятельно:

а) вычислите: $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\frac{\pi}{2}$ (Ответ: 3); $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+\cos 0-$

$c-\mathrm{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ (Ответ: $1\frac{2}{3}$); $\cos^2\frac{\pi}{4}-\sin 2\pi+\mathrm{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ (Ответ: $\frac{5}{6}$);

$\mathrm{tg}0+\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\pi$ (Ответ: 0);

б) упростите выражения:

1) $a^2\sin 2\pi+b^2\mathrm{tg}0+2ab\cos\pi+b^2\sin(-\pi)$ (Ответ: $-2ab$);

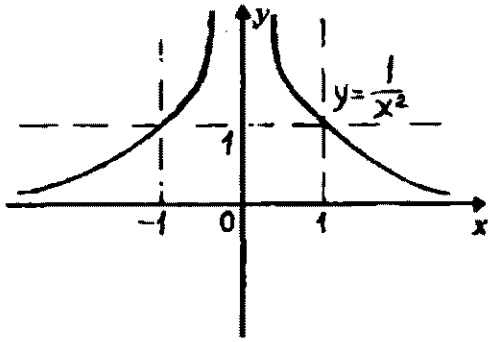
2) $x^2\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)+y^2\cos 0+tg\pi+2xy\sin\frac{3\pi}{2}$ (Ответ: $(x-y)^2$).

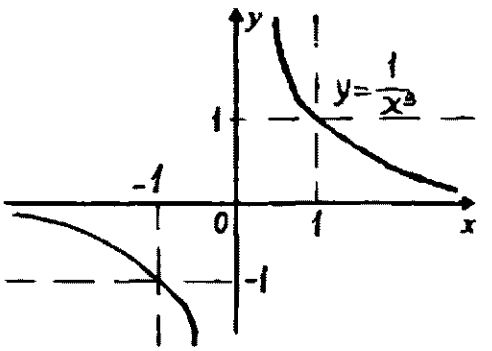
3. Решить № 71.

Решение.

а) $y=\frac{1}{x^2}$; $y(-x)=\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}=y(x)$ – чётная функция. График симметричен относительно оси ординат.

б) $y=\frac{1}{x^3}$; $y(-x)=\frac{1}{(-x)^3}=-\frac{1}{x^3}=-y(x)$ – нечётная функция. График симметричен относительно начала координат.





III. Проверочная работа (10 мин)

Вариант 1	*Вариант 2*
1. Докажите, что данная функция является чётной или нечётной:	
а) $f(x)=x^4-2x^2-\sin^2 3x$;	а) $f(x)=x^3-3x+\sin 2x$;
б) $y(x)=7x^3+\sin\frac{x}{2}$;	б) $y(x)=2x^6+4\cos\frac{x}{3}$;

в) $g(x)=|x|\cos 2x\sin^3 5x$.

2. Привести примеры нечётных функций.

в) $g(x)=|x|\sin 3x\cdot \mathrm{tg}5x$.

2. Привести примеры чётных функций.

3°. Может ли уравнение $f(x)=0$ иметь в точности 5 корней, если f всюду определённая и:

а) чётная функция (Ответ: да);

б) нечётная функция (Ответ: да).

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание: решить № 69, на стр. 92 № 16(весь).

УРОК № 3

Цели: ввести определение периодической функции и доказать периодичность тригонометрических функций; учить находить наименьший положительный период функции.

Ход урока

I. Итоги проверочной работы

II. Изучение нового материала

1. Примеры процессов и явлений из практики, имеющих повторяющийся характер.
2. Определение периодической функции.
3. Периоды тригонометрических функций (доказательство).

Период функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$ равен 2π.

Период функций $y=\mathrm{tg}x$ и $y=\mathrm{ctg}x$ равен π.

4. Период функции, представляющей собой сумму непрерывных и периодических функций, равен наименьшему кратному периодов слагаемых, если он существует.
5. Наименьший положительный период для функций $\sin(ax+b)$ и $\cos(ax+b)$ равен $T=\frac{2\pi}{a}$, а для функций $\mathrm{tg}(ax+b)$ и $\mathrm{ctg}(ax+b)$ имеем $T=\frac{\pi}{a}$.

III. Закрепление изученного материала

1. Решить № 62(а; б) (объясняет учитель).

Решение.

а) $f(x)=\sin\frac{x}{2}$; $a=\frac{1}{2}$, найдём период $T=\frac{2\pi}{a}=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$.

Доказали, что $T = 4\pi$ является периодом функции $f(x) = \sin\frac{x}{2}$.

б) $f(x) = 2\text{tg}3x$; $a = 3$, найдём период $T = \frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{3}$. Доказано.

2. Решить № 64(б; в).

Ответ: б) $T = \frac{\pi}{1{,}5} = \frac{2\pi}{3}$; в) $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

3. Решить № 65 (на доске и в тетрадях).

Решение.

а) $y = \sin x\cos x = \frac{1}{2} \cdot 2\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$; $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

б) $y = \sin x\sin 4x - \cos x\cos 4x = -\cos(x + 4x) = -\cos 5x$; $T = \frac{2\pi}{5}$.

в) $y = \sin^2 x - \cos^2 x = -\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = -\cos 2x$; $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

г) $y = \sin 3x\cos x + \cos 3x\sin x = \sin(3x + x) = \sin 4x$; $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

IV. Выполнение упражнений (объясняет учитель)

Найти период функции:

а) $y = 3\sin 4x + 6\sin x + \sin(x - \pi) + 5\sin(x + \pi)$.

Решение.

Упростим данную функцию: $3\sin 4x + 6\sin x + \sin(x-\pi) + 5\sin(x+\pi) =$ $=3\sin 4x + 6\sin x - \sin x - 5\sin x = 3\sin 4x$, значит $y = 3\sin 4x$; $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

б) $y = \sin 2x + \text{tg}\frac{x}{2}$.

Решение.

Период первого слагаемого $\sin 2x$ равен $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$; период второго слагаемого $\text{tg}\frac{x}{2}$ равен $T_2 = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$. Периодом заданной функции будет наименьшее кратное периодов её слагаемых, т.е. $T=2\pi$. Ответ: 2π.

в) $y=\cos\frac{x}{3}+\operatorname{tg}\frac{x}{5}$.

Решение.

Период $\cos\frac{x}{3}$ равен $T_1=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$; период $\operatorname{tg}\frac{x}{5}$ равен $T_2=\frac{\pi}{\frac{1}{5}}=5\pi$. Чтобы найти период данной функции, найдём наименьшее кратное чисел 6π и 5π, т.е. $T=30\pi$.

Ответ: 30π.

г) $y=\sin\frac{3x}{4}+5\cos\frac{2x}{3}$.

Решение.

Период $\sin\frac{3x}{4}$ равен $T_1=\frac{2\pi}{\frac{3}{4}}=\frac{8\pi}{3}$; период $5\cos\frac{2x}{3}$ равен $T_2=\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$.

Периодом данной функции будет наименьшее кратное чисел $\frac{8\pi}{3}$ и 3π, т.е. $T=24\pi$.

Ответ: 24π.

д) $y=3\sin(x-2)+7\cos\pi x$.

Решение.

Период функции $y=3\sin(x-2)$ равен $T_1=\frac{2\pi}{1}=2\pi$; период функции $y=7\cos\pi x$ равен $T_2=\frac{2\pi}{\pi}=2$. Периода у функции $y=3\sin(x-2)+7\cos\pi x$ не существует, так как такого числа, при делении которого на 2π и на 2 получались бы целые числа, нет.

Ответ: не существует.

V. Итоги урока

VI. Домашнее задание: п. 4(весь); решить № 62(в; г); № 63; № 64(а; г); № 68; на стр. 92 решить № 17.

УРОК № 4

Цели: научить использовать периодичность тригонометрических функций при построении графиков; закрепить изученный материал.

Ход урока

I. Устная работа

1. Назовите наименьший положительный период функции:

а) $y = 2\sin 2x$; б) $y = 3\cos 4x$; в) $y = \sin(-2x)$; г) $y = \mathrm{tg}\,2x$; д) $y = \cos\frac{1}{3}x$;

е) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; ж) $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; з) $y = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$;

и) $y = \sin\frac{x}{2} + \mathrm{tg}x$; к) $y = \sin 2x + \cos x$; л) $y = |\cos x|$.

2. Является ли периодической функция:

а) $y = x - \sin x$; б) $y = \mathrm{tg}x + 2$; в) $y = 2x\cos x$; г) $y = \sin(-x) - 1$?

Ответ: а) нет; б) да; в) нет; г) да.

3. Какое наименьшее положительное число является периодом всех тригонометрических функций? (Ответ: 2π.)

II. Работа с учебником

Учащиеся самостоятельно разбирают построение графика $y = 2\cos x + 1$ по учебнику (пример 5, рис. 35 и рис. 36).

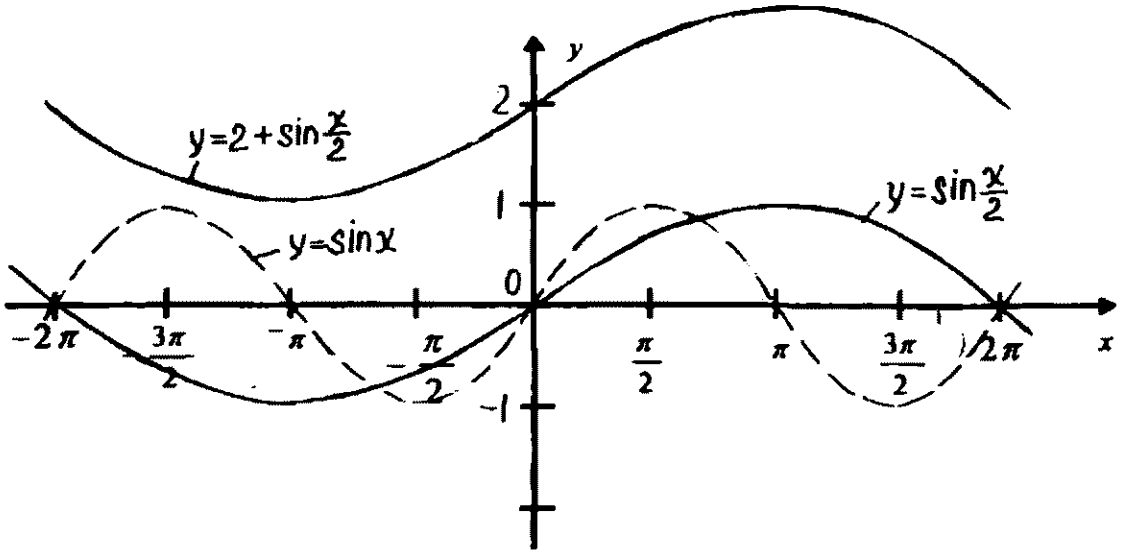
III. Выполнение упражнений

1. Построить график функций:

а) № 74(в). $y = 2 + \sin\frac{x}{2}$.

Решение.

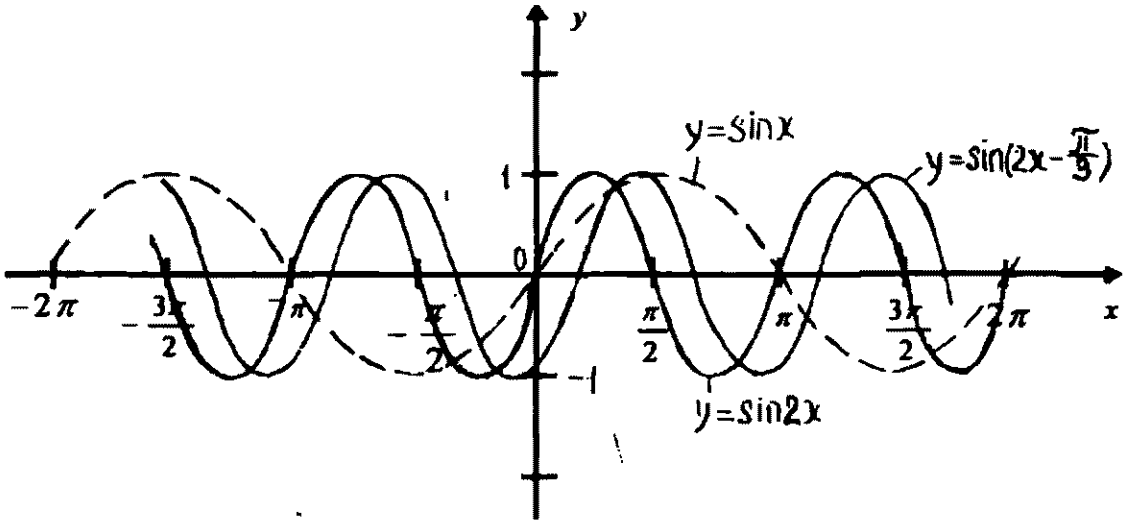
Период $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, $T = 4\pi$, то есть вдвое больше периода функции $y = \sin x$. Таким образом, график функции $y = \sin\frac{x}{2}$ получится из графика $y = \sin x$ путём растяжения его вдоль оси OX вдвое. Затем график $y = \sin\frac{x}{2}$ переносим вверх по оси OY на 2 единицы.



б) № 74(б). $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2\cdot\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

Решение.

Область определения функции – вся числовая прямая. Множество значений – отрезок [–1; 1]. Период функции $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$, то есть вдвое меньше периода функции $y = \sin x$. Значит, график функции $y = \sin 2x$ получится из графика $y = \sin x$ путём сжатия вдоль оси OX вдвое. Затем график $y = \sin 2x$ переносим в положительном направлении оси абсцисс (вправо) на $\frac{\pi}{6}$.



2. Решить № 73(в; г).

Решение.

в) $y=\sin^4 x-\cos^4 x=\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=\sin^2 x-\cos^2 x=$

$= -\cos 2x. \quad T = \frac{2\pi}{2} = \pi.$

Ответ: π.

г) $y = \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 = \sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1 + \sin x.$

$T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi.$

Ответ: 2π.

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание: п. 4; № 67 и на стр. 276 № 77(а; б) и № 79.

ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИЙ. ЭКСТРЕМУМЫ (3 ч)

УРОК № 1

Урок –лекция.

Цели: ввести понятие возрастания и убывания функций, экстремумов функции; учить применять эти понятия при чтении и построении графиков функций.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания

Объяснить учащимся решение заданий, вызвавших у них затруднения.

II. Объяснение нового материала лекционным методом

1. Определение возрастания функции.
2. Определение убывания функции.
3. Доказательство возрастания и убывания функций $f(x) = x^n, n \in N$;

$y = f(x)$, $y = -f(x)$; $f(x) = \frac{1}{x}$ на промежутке $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Примеры 1, 2, 3 из пункта 5.

4. Нахождение промежутков возрастания и убывания чётных и нечётных функций (рис. 40).
5. Возрастание и убывание тригонометрических функций (рис. 41).

6. Экстремумы:
а) точки минимума (рис. 42); б) точки максимума (рис. 43);
в) экстремумы функции.
7. Используя графики на рис. 48 (б, в), объяснить нахождение промежутков возрастания и убывания функции; нахождение точек максимума и минимума функции и экстремумов функции.
8. Начертить эскиз графика функции f:
а) № 78(б; в); б) № 79(б; в); в) № 80(б; в).

III. Закрепление изученного материала
1. Сформулируйте определение функции, возрастающей (убывающей) на множестве Р.
2. Дайте определения точки максимума, точки минимума. Что такое экстремум функции?
3. Выполнить устно № 77 по рис. 48(а, г).

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание: п. 5; решить № 78(а; г); № 79(а; г); № 80(а; г); № 86; № 87.

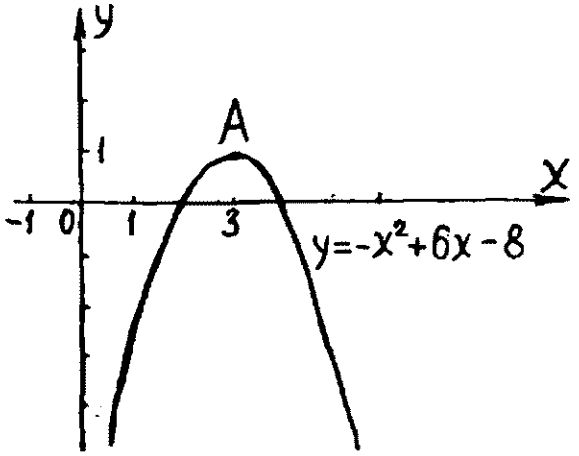
УРОК № 2

Урок типовых задач.
Цели: способствовать развитию навыков нахождения промежутков возрастания и убывания функции, её максимумов и минимумов.

Ход урока

I. Проверка изученного материала
1. Сформулировать определение возрастания и убывания функции на множестве Р.
2. Дайте определение точки максимума, точки минимума. Что такое экстремум функции?
3. Работа по рис. 79 на стр. 92.

II. Решение типовых задач (объясняет учитель)
1. № 82(а; б).
Решение.
а) $y = -x^2 + 6x - 8$.
Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вниз.



Координаты вершины:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-1)} = 3;$$

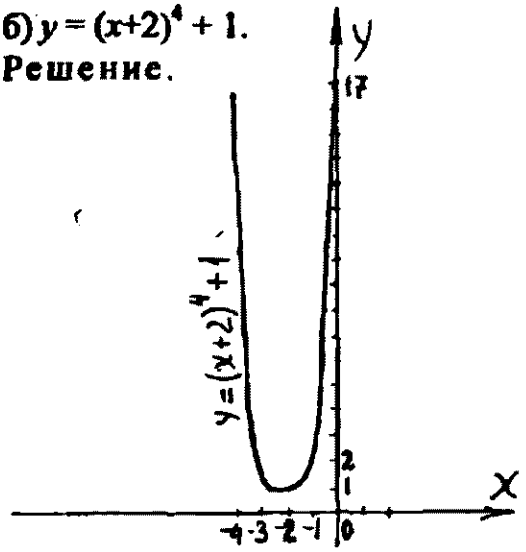
$y_0 = -9 + 18 - 8 = 1$; A(3; 1).

Функция возрастает на промежутке $(-\infty; 3]$ и убывает на промежутке $[3; +\infty)$;

$x_{max} = 3$, $y_{max} = y(3) = 1$.

б) $y = (x+2)^4 + 1$.

Решение.



Вершина B(–2; 1),

ось симметрии $x = -2$.

x	–4	–3	–2	–1	0
y	17	2	1	2	17

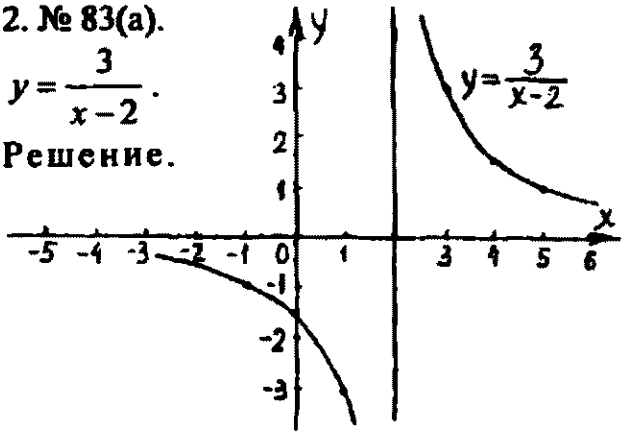
Функция убывает на $(-\infty; -2]$ и возрастает на $[-2; +\infty)$;

$x_{min} = -2$, $y_{min} = y(-2) = 1$.

2. № 83(а).

$$y = \frac{3}{x-2}.$$

Решение.



$D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

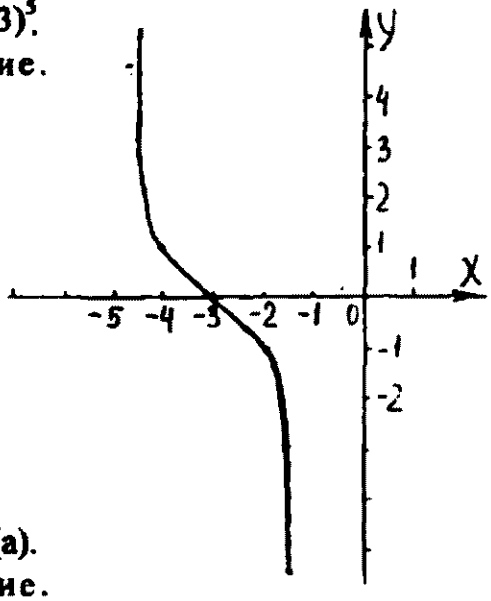
Функция убывает на $(-\infty; 2)$ и $(2; +\infty)$;

точек максимума нет,

точек минимума нет.

Экстремумов функции нет.

3. № 83(б).
$y=-(x+3)^5$.
Решение.



x	−4	−3	−2	−1	−5
y	1	0	−1	−32	32

Функция убывает $(-\infty; +\infty)$.
Точек экстремума нет,
экстремумов функции нет.

4. № 81(а).
Решение.
Пусть $x_2 > x_1$, $y_2 = kx_2 + b$; $y_1 = kx_1 + b$.

$$y_2 - y_1 = kx_2 + b - (kx_1 + b) = kx_2 + b - kx_1 - b = k(x_2 - x_1) > 0,$$

так как $k > 0, x_2 > x_1$ и $y_2 > y_1$.
Значит, функция $y = kx + b$ возрастает на множестве R при $k>0$.
5. № 90(а).
Решение.

$$\cos\frac{25\pi}{9} = \cos\left(2\pi + \frac{7\pi}{9}\right) = \cos\frac{7\pi}{9};\ \sin\frac{4\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{10}\right) = \cos\frac{3\pi}{10};\ \cos\frac{4\pi}{9};$$

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{9}\right) = \cos\frac{5\pi}{9};\ \frac{3\pi}{10} < \frac{4\pi}{9} < \frac{5\pi}{9} < \frac{7\pi}{9},$$ тогда

$$\cos\frac{7\pi}{9} < \cos\frac{5\pi}{9} < \cos\frac{4\pi}{9} < \cos\frac{3\pi}{10}.$$

Ответ: $\cos\frac{25\pi}{9}$; $\cos\frac{5\pi}{9}$; $\cos\frac{4\pi}{9}$; $\sin\frac{4\pi}{5}$.

6. № 90(в).
Решение.

$$\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{10};\ \operatorname{ctg}\frac{12\pi}{5} = \operatorname{ctg}2\frac{2}{5}\pi = \operatorname{ctg}\left(2\pi + \frac{2}{5}\pi\right) = \operatorname{ctg}\frac{2\pi}{5};$$

$$\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5} = \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{5} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}\right) = \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{10};\ \operatorname{ctg}\frac{7\pi}{15};$$

$\frac{9\pi}{10}=\frac{27\pi}{30}$; $\frac{2\pi}{5}=\frac{12\pi}{30}$; $\frac{3\pi}{10}=\frac{9\pi}{30}$; $\frac{7\pi}{15}=\frac{14\pi}{30}$;

значит, $\frac{3\pi}{10}<\frac{2\pi}{5}<\frac{7\pi}{15}<\frac{9\pi}{10}$. Тогда $\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{10}<\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{15}<\operatorname{ctg}\frac{12\pi}{5}<\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{10}$.

Ответ: $\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{10}$; $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{15}$; $\operatorname{ctg}\frac{12\pi}{5}$; $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$.

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание: п. 5; решить № 81(б); № 90(б; г); № 82(в; г); № 83(в; г).

УРОК № 3

Урок выборочной проверки.

Цели: проверить усвоение учащимися изученного материала; ликвидировать пробелы в знаниях; упражнять в построении графиков функций.

Ход урока

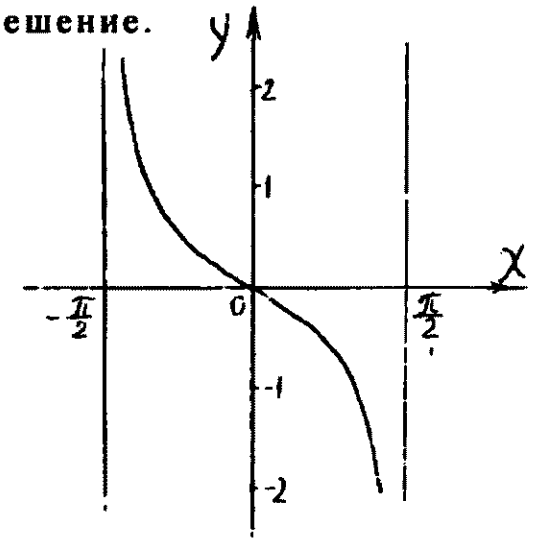
I. Опрос учащихся по изученному материалу

Примерно полкласса опрашивается по опорному конспекту урока–лекции № 1 и типовым задачам (учитель подбирает аналогичные типовым (урок № 2) задачи).

II. Выполнение упражнений

1. № 85(в). $y=-\operatorname{tg}x$.

Решение.

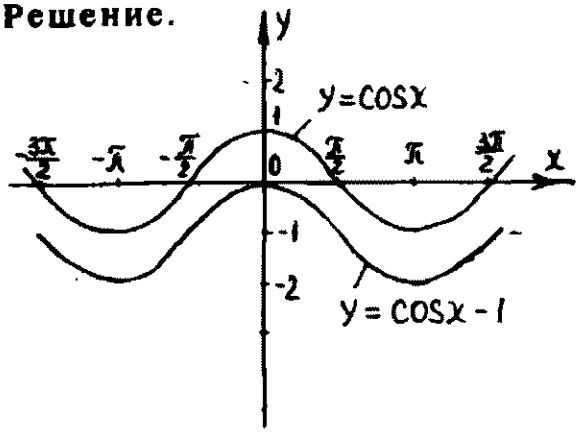


Функция убывает на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$;

точек экстремума нет.

2. № 85(г). $y = \cos x - 1$.

Решение.



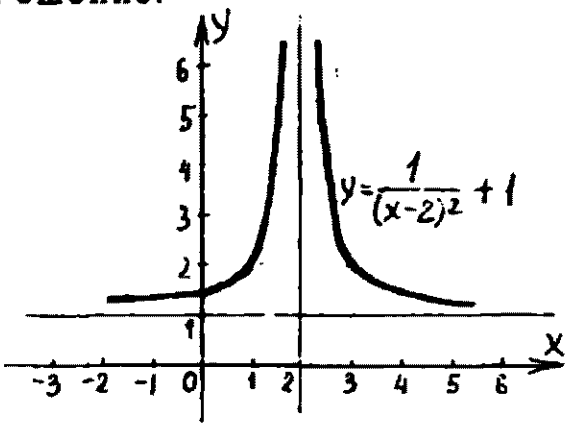
Функция возрастает на $[-\pi+2\pi n;\ 2\pi n]$, убывает на $[2\pi n;\ \pi+2\pi n]$;

$x_{\max} = 2\pi n,\ \ y(2\pi n) = 0;$

$x_{\min} = \pi + 2\pi n,\ \ y(\pi + 2\pi n) = -2, n \in Z.$

3. № 88(а). $y = \dfrac{1}{(x-2)^2} + 1.$

Решение.

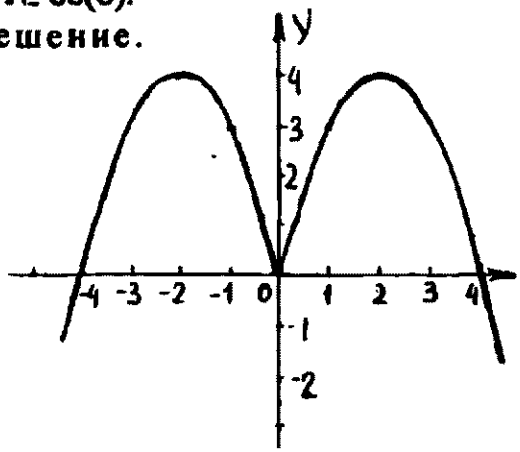


Функция возрастает на $(-\infty;\ 2)$ и убывает на $(2;\ +\infty)$;

точек экстремума нет.

4. № 88(б).

Решение.



$y = 4|x| - x^2 = -(x^2 - 4|x|).$

Функция возрастает на $(-\infty;\ -2]$ и $[0;\ 2]$;

убывает на $[-2;\ 0]$ и $[2;\ +\infty)$.

$x_{\max} = -2$ и $x_{\max} = 2;$

$y_{\max} = y(-2) = y(2) = 4;$

$x_{\min} = 0;\ \ y_{\min} = y(0) = 0.$

IV. Домашнее задание: решить № 85(б); № 88(в; г); № 89(а; в).

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ (2 ч)

УРОК № 1

Цели: способствовать развитию навыков чтения графиков и построения графиков функций, используя схему исследования функции.

Ход урока

I. Работа по учебнику

1. Построение графиков функций:

а) недостаток способа построения графиков функций «по точкам» (рис. 49–53);

б) выявление характерных особенностей функции, то есть исследование функции;

в) рассмотреть пример: исследовать функцию $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ (рис. 54 и рис. 55).

2. Схема исследования функций (записать в тетради):

а) область определения функции;

б) чётность или нечётность; периодичность;

в) пересечение графика с осями координат;

г) промежутки знакопостоянства функции;

д) промежутки возрастания или убывания функции;

е) точки экстремума, вид экстремума (максимум или минимум) и значения функции в этих точках;

ж) область значений.

3. Вертикальные асимптоты, горизонтальные и наклонные асимптоты (рис. 53, рис. 55, рис. 32).

4. «Чтение» графиков (рис. 56).

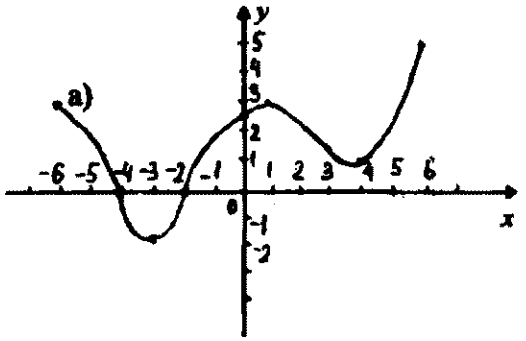
II. Закрепление изученного материала

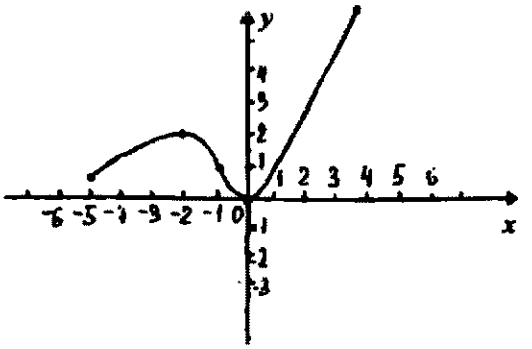
1. Устно № 93 по рис. 57(а; б).

2. № 94(а; б).

Используя приведённые в таблице свойства функции f, построить её график (свойства в тетрадь не переписывать).

Ответ:





3. № 95(а). $f(x) = 5 - 2x$.

Решение.

а) $D(y) = (-\infty; +\infty)$;

б) $f(-x) = 5 - 2\cdot(-x) = 5 + 2x = -(-5 - 2x)$ - функция ни чётная и ни нечётная;

непериодическая;

в) пересечение с осью OX:

$y = 0$, $x = 2{,}5$;

пересечение с осью OY:

$x = 0$, $y = 5$.

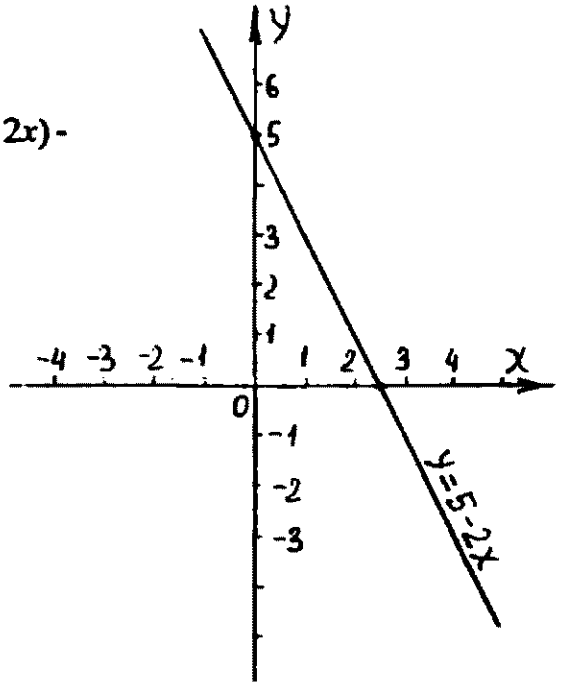
г) $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 2{,}5)$;

$f(x) < 0$ при $x \in (2{,}5; +\infty)$;

д) функция убывает на $(-\infty; +\infty)$;

е) точек экстремума нет;

ж) $E(y) = (-\infty; +\infty)$.



III. Итоги урока

IV. Домашнее задание: п.6; № 94(в, г); № 95(б; в; г) и на стр. 278 № 95; № 101.

УРОК № 2

Цели: вырабатывать навыки исследования функции и построения её графика.

Ход урока

I. Устная работа

1. № 93(в; г).

2. Расположите числа в порядке возрастания:

а) $\sin 10^0$, $\sin 75^0$, $\sin 20^0$; б) $\sin 2$, $\sin(-2)$, $\sin(-4)$, $\sin 4$;

в) $\cos 3^0$, $\cos 43^0$, $\cos 23^0$; г) $\mathrm{tg}\,40^0$, $\mathrm{tg}\,60^0$, $\mathrm{tg}\,10^0$;

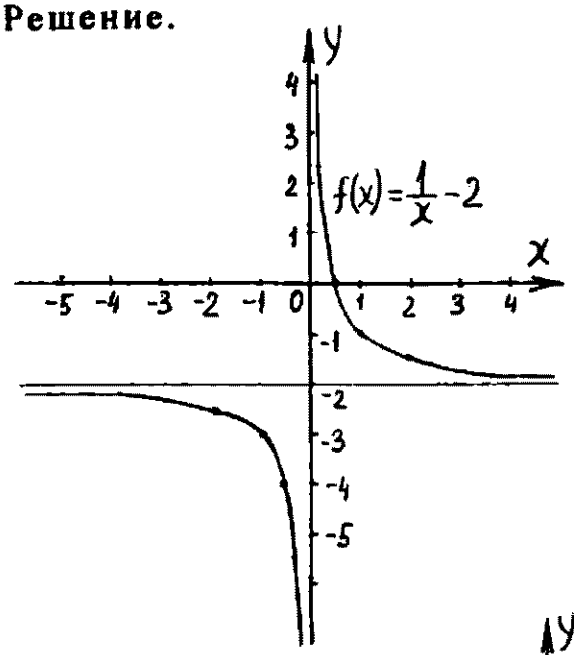
д) $\cos 2$, $\cos 4$, $\cos 6$; е) $\mathrm{tg}(-5)$, $\mathrm{tg}(-3)$, $\mathrm{tg}\,3$.

II. Выполнение упражнений

Провести по общей схеме исследование функции и построить её график.

1. № 96(а). $f(x) = \frac{1}{x} - 2$.

Решение.



а) $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

б) ни чётная, ни нечётная; непериодическая;

в) нули функции: $x = 0{,}5$;

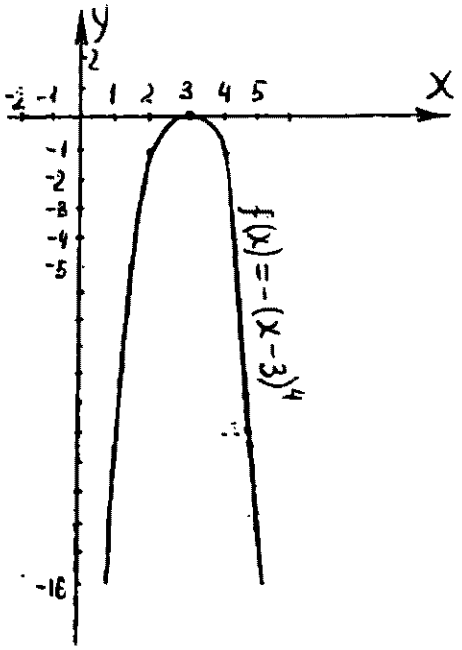
г) $f(x) > 0$ при $x \in (0; 0{,}5)$, $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0{,}5; +\infty)$;

д) функция убывает $(-\infty; +\infty)$;

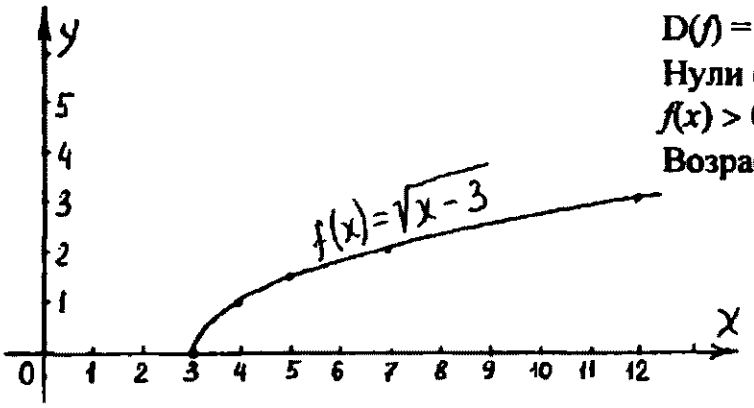
е) точек экстремума нет;

ж) $E(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.

2. № 96(б). $f(x) = -(x-3)^4$.



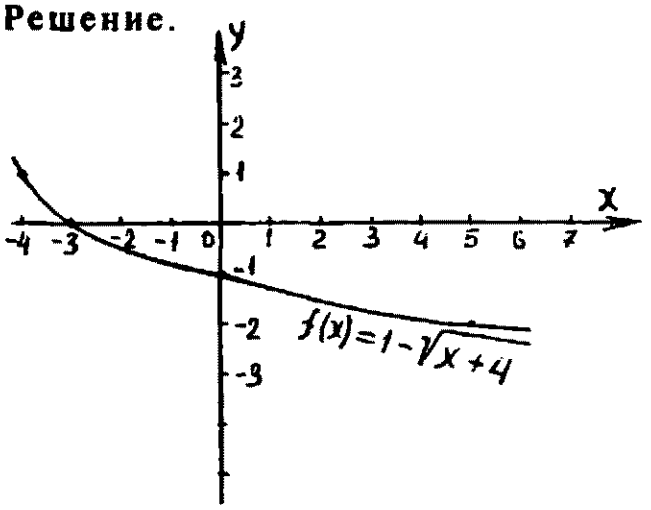
3. № 97(а). $f(x)=\sqrt{x-3}$.



D(f) = [3; +∞); E(f) = [0; +∞).
Нули функции: $x = 3$.
$f(x) > 0$ при $x \in (3; +\infty)$.
Возрастает на [3; +∞).

4. № 98(б). $f(x)=1-\sqrt{x+4}$.

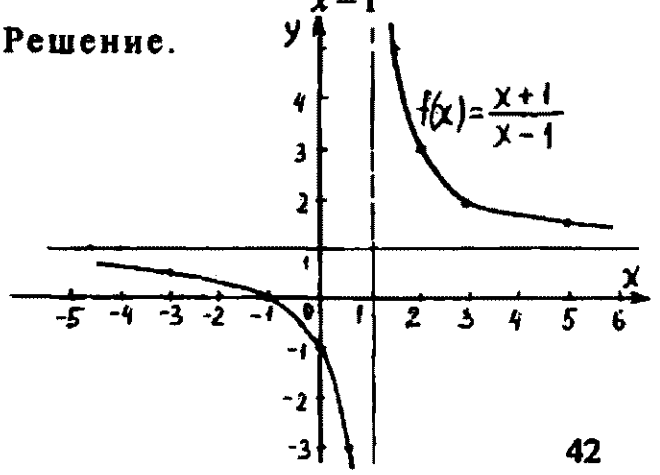
Решение.



а) D(f) = [–4; +∞);
б) функция ни чётная, ни нечётная; непериодическая.
в) пересечение с осью OX: $y = 0$, $x = -3$;
с осью OY: $x = 0$, $y = -1$;
г) $f(x) > 0$ при $x \in [-4; -3)$,
$f(x) < 0$ при $x \in (-3; +\infty)$;
д) функция убывает на [–4; +∞);
е) точки экстремума:
$x_{max} = -4$, $y_{max} = y(-4) = 1$;
ж) E(f) = (–∞; 1].

5. № 99(б). $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Решение.



$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1+2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1};$$

$$f(x)=\frac{2}{x-1}+1.$$

D(f) = (–∞; 1)∪(1; +∞).
E(f) = (–∞; 1)∪(1; +∞).

6. № 99(г) – самостоятельно. Указание: $f(x)=\frac{2x+1}{x}=2+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}+2$.

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание: п. 6; решить № 96(в; г); № 97(б; в; г); № 98(г).

СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ (4 ч)

УРОК № 1

Урок –лекция.

Цели: систематизировать знания учащихся о свойствах тригонометрических функций.

Ход урока

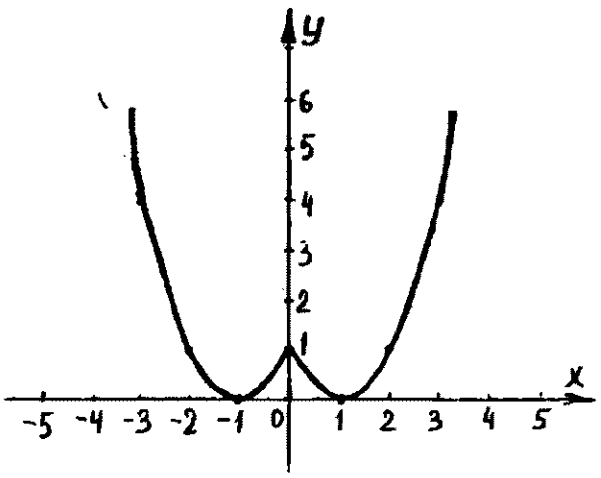
I. Проверка домашнего задания

1. Разобрать решение заданий, вызвавших затруднения у учащихся.
2. Решить № 99(а; в) на доске и в тетрадях.

а) $f(x)=x^2-2|x|+1$.

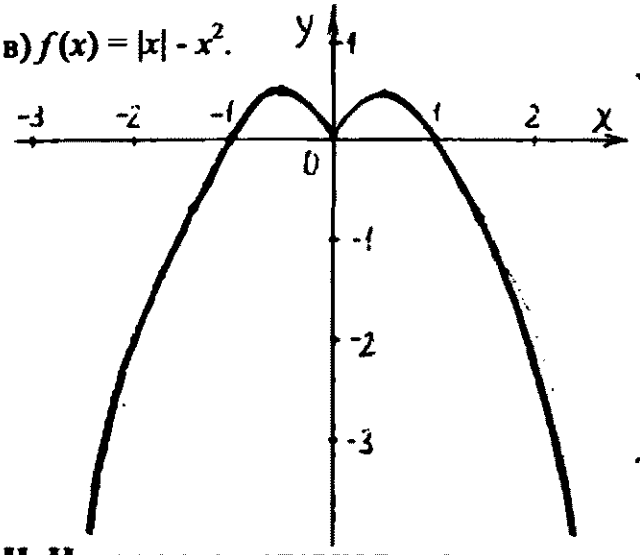
Решение.

$f(x)=(|x|-1)^2$;



1. $D(f)=(-\infty;+\infty)$.
2. Функция чётная.
3. Нули функции: $x=-1$; $x=1$.
4. $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.
5. Точки экстремума: $x_{min}=-1;1$; $y_{min}=y(-1)=y(1)=0$; $f_{min}=0$.
6. Функция убывает на $(-\infty;-1]$ и $[0;1]$, возрастает на $[-1;0]$ и $[1;+\infty)$.
7. Область значений $E(f)=[0;+\infty)$.

в) $f(x) = |x| - x^2$.



Указание: преобразуем

$$|x| - x^2 = -\left(x^2 - |x|\right) =$$

$$= -\left(x^2 - |x| + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} =$$

$$= -\left(|x| - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4},$$

то есть $f(x) = -\left(|x| - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$.

II. Изложение материала лекционным методом

1. Исследование тригонометрических функций:

а) разобрать по таблице на стр. 55 свойства тригонометрических функций $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$;

б) применение свойств при решении задач (разобрать решение примера 1).

2. Работа по учебнику:

а) рассмотреть построение графика функции

$f(x) = 2\sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) = 2\sin 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ (рис. 58 – рис. 61);

б) исследовать функцию $f(x) = 2\sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)$ (пример 2). Рис 62 и рис. 58 учебника.

3*. Построить график функции $y = 2 - \sin\left|x + \frac{\pi}{3}\right|$.

Решение.

1 способ. Строим график функции $y = -\sin|x|$. Ось ординат переносим на $+\frac{\pi}{3}$, а ось абсцисс - на -2.

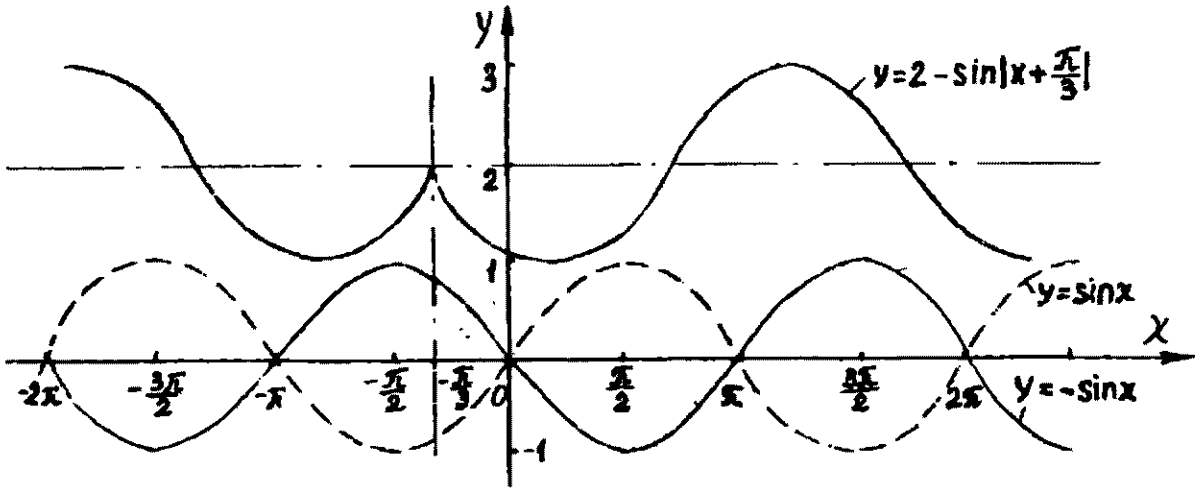
2 способ. График имеет две ветви, уравнения которых различны.

1) если $x + \frac{\pi}{3} \geq 0$, то есть $x \geq -\frac{\pi}{3}$, то $y = 2 - \sin(x + \frac{\pi}{3})$.

2) если $x + \frac{\pi}{3} < 0$, то есть $x < -\frac{\pi}{3}$, то $y = 2 - \sin(-(x + \frac{\pi}{3})) = 2 + \sin(x + \frac{\pi}{3})$.

Область определения функции – вся числовая прямая. Интервалы измене-

ния функции определяем из условия $-1 \le -\sin\left|x+\frac{\pi}{3}\right| \le 1$, то есть $-1+2 \le y \le 1+2$, $1 \le y \le 3$. Общая точка для обеих ветвей графика: $x=-\frac{\pi}{3}$; $y=-\sin|0|+2=2$; точка $(-\frac{\pi}{3}; 2)$.



III. Итоги урока

IV. Домашнее задание: п. 7(1); № 104(б); №112(а; б); №109(в).

УРОК № 2

Цели: закрепить знание учащимися свойств тригонометрических функций при исследовании функций и построении графиков.

Ход урока

I. Проверочная работа (10 мин.)

Вариант 1. Свойства функции $y=\cos x$ и её график.

Вариант 2. Свойства функции $y=\sin x$ и её график.

II. Решение задач

1. № 100(а; б).

Указание: $\operatorname{tg}\frac{18\pi}{5}=\operatorname{tg}\left(3\pi+\frac{3\pi}{5}\right)=\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5}=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=-\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$;

$$\cos\left(-\frac{15\pi}{8}\right)=\cos\frac{15\pi}{8}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\frac{\pi}{8}.$$

2. № 110(а; б; в).

Решение.

а) $y=\dfrac{1}{1-\sin x}$; $\quad 1-\sin x\neq 0 \Leftrightarrow \sin x\neq 1 \Leftrightarrow x\neq \dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z.$

D(y) = R, кроме $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, n∈Z.

б) $y=\sqrt{\sin^2\dfrac{x}{2}-\cos^2\dfrac{x}{2}}$; $\quad \sin^2\dfrac{x}{2}-\cos^2\dfrac{x}{2}\geq 0 \Leftrightarrow -\cos x\geq 0 \Leftrightarrow \cos x\leq 0.$

D(y)=[$\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$; $3\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$], n∈Z.

в) $y=\dfrac{1}{\cos x-1}$. $\quad$ **Ответ**: D(y) = R, кроме $x=2\pi n$, n∈Z.

3. № 111(а; б)..

а) $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$.

Решение.

$$y=\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\cdot 2;\quad y=\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 2;$$

$$y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right).\quad E(y)=[-2;2].$$

б) $y=\dfrac{3}{1+\mathrm{tg}^2 x}$.

Решение.

$$y=3\cdot\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}=3\cos^2 x;\quad E(y)=(0;3].$$

4. № 112(в).

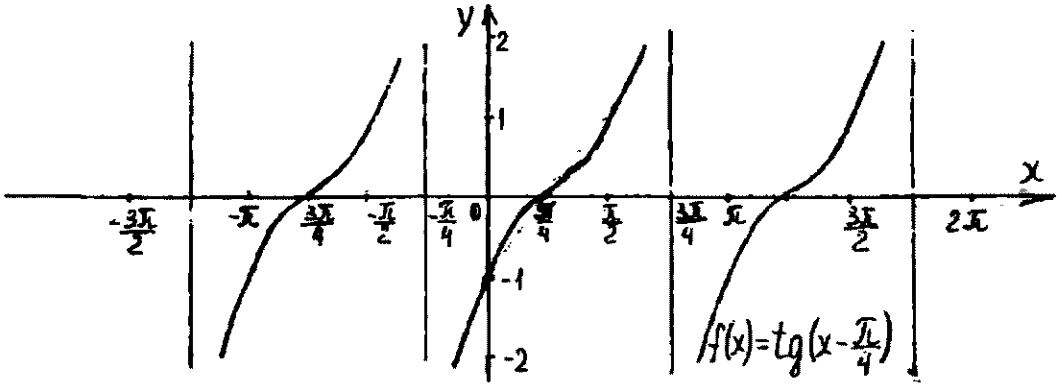
Исследуйте функцию $f(x)=\mathrm{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ и постройте её график:

а) область определения: для функции y = tg$x$ $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, n∈Z; тогда

$$x-\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z;\quad x\neq\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z;\quad x\neq\frac{3\pi}{4}+\pi n, n\in Z.$$

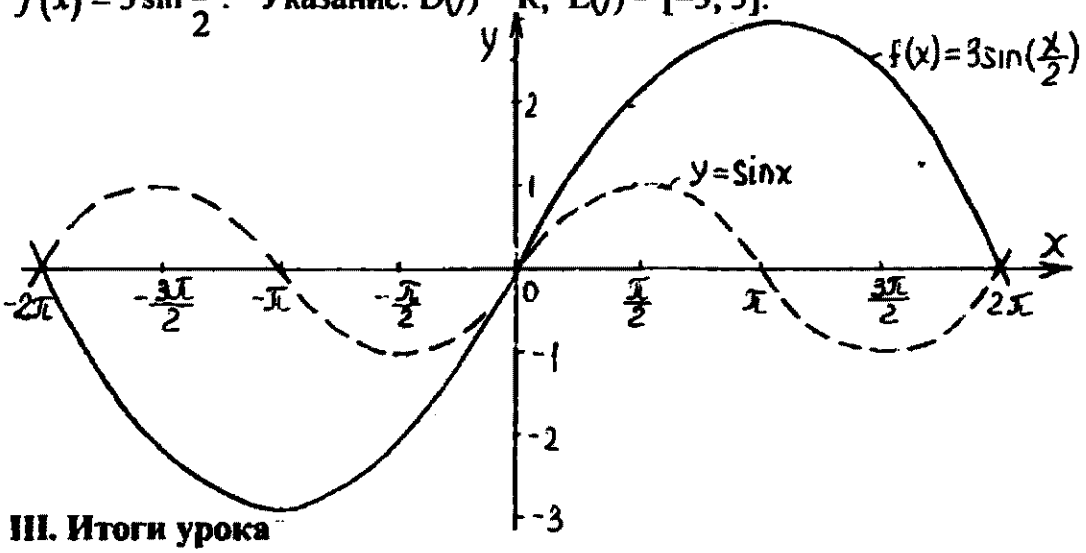
$$D(f)=\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{3\pi}{4}+\pi n\right), n\in Z;$$

б) E(f) = (−∞; +∞).



5. Самостоятельно решить № 104(г).

$f(x) = 3\sin\frac{x}{2}$. Указание: D(*f*) = R; E(*f*) = [–3; 3].



III. Итоги урока

IV. Домашнее задание: п. 7(1), решить № 104(в), № 101, № 105(в), № 113(а).

УРОК № 3

Цели: ввести понятие гармонических колебаний и показать их важную роль в физике.

Ход урока

I. Итоги проверочной работы

II. Объяснение нового материала

1. Гармонические колебания $f(x) = A\cos(\omega t + \varphi)$ или $f(x) = A\sin(\omega t + \varphi)$,

$$f(x) = A\sin(\omega t + \varphi) = A\cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

A – амплитуда колебания; ω – частота колебания;

φ – начальная фаза колебания, φ ∈ [0; 2π).

Период $T = \frac{2\pi}{\omega}$ называют периодом гармонического колебания.

2. Важная роль гармонических колебаний в физике (рис. 149, рис 63).

III. Закрепление изученного материала

1. № 106(а; б).
2. № 107(а; б; в).

Решение.

а) $I(t) = 0{,}25\sin 50\pi t$; $A = 0{,}25$; $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{50\pi} = \frac{1}{25}$; $\omega = 50\pi$.

б) и в) – решить самостоятельно.

3) № 108 – самостоятельно.

4) № 114 (устно по рис. 64).

IV. Выполнение упражнений

1. Найти область значений функции $y = \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x + 5$.

Решение.

$$y = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + 5 = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 5.$$

Область значений $y = \sin x$ $\quad -1 \le y \le 1$. Тогда

$$-1 \le \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \le 1, \text{ или } -2 \le 2\sin(2x + \frac{\pi}{3}) \le 2.$$

Прибавляя 5 к каждой части этих неравенств, найдём, что

$$3 \le 2\sin(2x + \frac{\pi}{3}) + 5 \le 7, \text{ или } 3 \le \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x + 5 \le 7.$$

Ответ: [3; 7].

2. Найти промежутки знакопостоянства функции $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)$.

Решение.

По свойству функции $y = \sin x$ находим, что данная функция принимает:

а) положительные значения при

$$2\pi n < \frac{\pi}{3} - 4x < \pi + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z;$$

б) отрицательные значения при

$$\pi + 2\pi n < \frac{\pi}{3} - 4x < 2\pi + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} < x < -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$$

3. Найти область определения функции $y = \text{ctg}4x - \text{tg}\frac{x}{3}$.

Решение.

Данная функция определена в общей части областей определения функций $y = \text{ctg}4x$ и $y = \text{tg}\frac{x}{3}$, то есть область определения данной функции определяется системой: $\begin{cases} 4x \neq \pi n, \\ \frac{x}{3} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \end{cases}$ или $\begin{cases} x \neq \frac{\pi n}{4}, \\ x \neq \frac{3\pi}{2} + 3\pi n \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} n, n \in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{4} n < x < \frac{\pi}{4}(n+1), n \in Z.$

V. Итоги урока

VI. Домашнее задание: п.7; решить № 102; № 103(а; в); № 106(в; г); №112(г); повторить материал п. 3 – п. 6.

УРОК № 4

Цели: повторить и систематизировать изученный материал, подготовиться к контрольной работе.

Ход урока

I. Повторение изученного материала

Вопросы:

1. Что такое функция, её область определения, область значений?
2. Дайте определение чётной и нечётной функций. Каким свойством обладают их графики?
3. Что такое периодическая функция, период функции?
4. Дайте определение возрастающей (убывающей) функции на множестве Р.
5. Дайте определение точки максимума, точки минимума. Что такое экстремум функции?
6. Какие задачи решаются при исследовании функции?

II. Выполнение упражнений

1. Решить № 18(2) а, б на стр. 92–93.
2. Решить № 19(2) а, б на стр. 93.
3. Исследуйте на чётность функцию:

а) $f(x) = 42x^3 + \text{tg}x$; б) $f(x) = \dfrac{3x^8}{\cos x}$; в) $g(x) = \dfrac{x^5 \sin x}{\text{tg}^2 x}$;

г) $y = 12 \sin x \cos 3x \text{tg}5x$; д) $y = x^3 \sin(x + |x|)$; е) $y = \text{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$;

ж) $y = \text{ctg}x + x\cos^2 x$.

Ответ: а) нечётная; б) чётная; в) чётная; г) чётная; д) чётная; ж) нечётная.

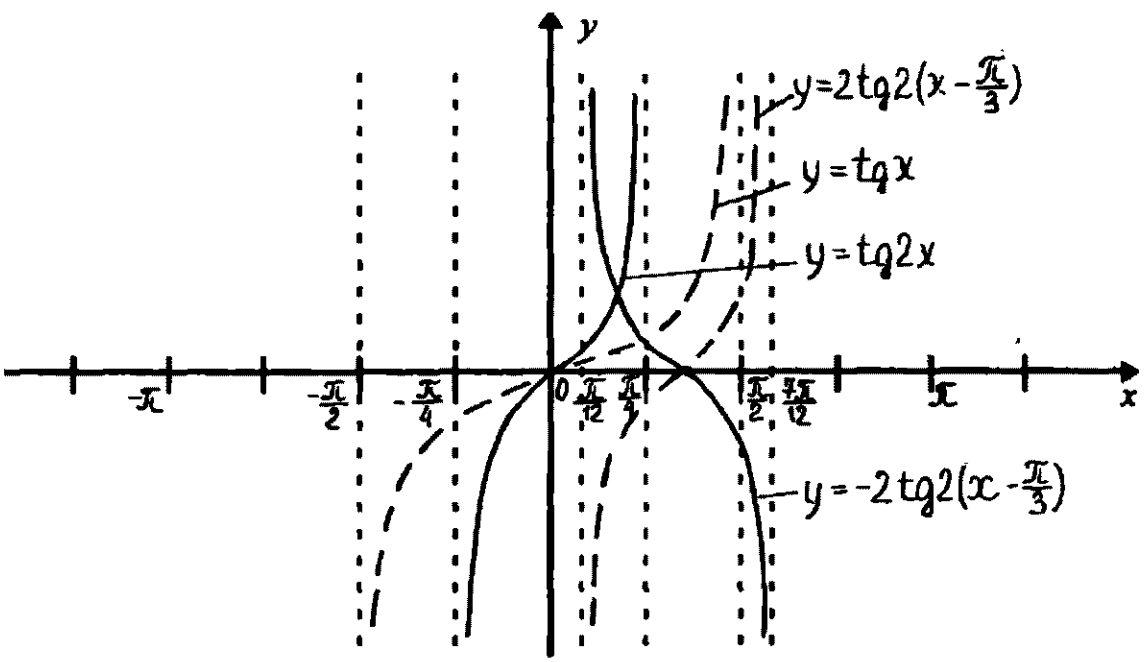
4. Исследуйте функцию $y = 4\sin 0{,}5x$ и постройте её график.

Ответ: $D(y) = \mathbb{R}$; $E(y) = [-4; 4]$; нули функции $x = 2\pi n$, $n \in Z$;

$x_{max} = \pi + 4\pi n, n \in Z$; $y_{max} = 4$;

$x_{min} = -\pi + 4\pi n, n \in Z$; $y_{min} = -4$.

5. Исследуйте функцию $y = -2\text{tg}2\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ и постройте её график.



III. Итоги урока

IV. Домашнее задание: повторить материал § 2, п. 3 – п. 7; решить на стр. 93 № 18(2) в; г; № 19(2) в; г; № 103(г); № 104(а).

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2 (1 ч)

Цели: проверить усвоение учащимися изученного материала.

Ход урока

I. Организация учащихся на выполнение работы

II. Выполнение работы

I вариант

1. Изобразите схематически график функции и перечислите её свойства:
а) $y=(x-2)^4$; б) $y=2\cos 0{,}5x$.
2. Докажите, что функция $f(x) = 4x - \mathrm{tg}x$ нечётная.
3. Расположите числа в порядке возрастания: sin1,4; sin(−1,8); sin0,2; sin2,5.

II вариант

1. Изобразите схематически график функции и перечислите её свойства:
а) $y=\dfrac{1}{x+2}$; б) $y=0{,}5\sin 2x$.
2. Докажите, что функция $f(x) = x^2 + 3\cos x$ чётная.
3. Расположите числа в порядке возрастания: cos0,4; cos(−1,2); cos2,9; cos4,3.

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание: повторить § 1.

§ 3. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ (15 Ч)

АРКСИНУС, АРККОСИНУС И АРКТАНГЕНС (3 Ч)

УРОК № 1

Цели: доказать теорему о корне и рассмотреть примеры её применения.

Ход урока

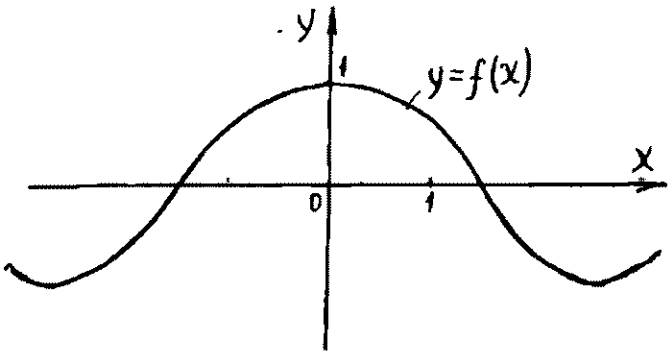
I. Итоги контрольной работы. Анализ ошибок

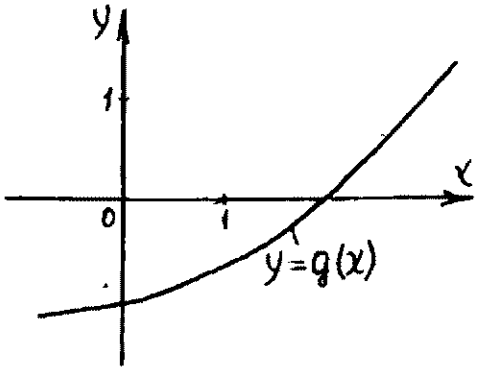
II. Объяснение нового материала

1. Сформулируйте определение функции, возрастающей (убывающей) на

множестве P.

2. Укажите промежутки возрастания и убывания функции, графики которых изображены (рис. 1).





3. Сколько решений имеет уравнение: а) $f(x) = 0,5$; б) $g(x) = 0,5$?

4. Подвести учащихся к выводу, что если функция возрастает (убывает) на промежутке, то уравнение имеет единственный корень.

5. Доказательство теоремы о корне.

III. Решение упражнений

Устно: № 116(а; г), № 117(а; в).

Письменно: № 118(а; в), №119(а; г), №120(в; г).

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание

1. Работа над ошибками.
2. Из § 3 п. 8(1).
3. № 116(б; в), № 117(б; г), № 118(б), № 119(б; в), № 120(а; в).
4. Повторить значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

Для желающих. Доказать тождество $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$.

Решение.

Разделить числитель и знаменатель дроби в левой части равенства на $\cos\alpha$. В правой части применить формулу сложения $\dfrac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$.

Заменить в числителе единицу на $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$, а $\sin 2\alpha$ на $2\sin\alpha\cos\alpha$.

В числителе получить $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2$; знаменатель же равен $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (\cos\alpha + \sin\alpha)\cdot(\cos\alpha - \sin\alpha)$.

УРОК № 2

Цели: ввести понятия арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс; научить вычислять их значения.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания

1. Найти значение:

$\sin 30^0$ $\cos 45^0$ $\mathrm{tg}\,60^0$ $\mathrm{ctg}\,30^0$

$\mathrm{tg}\,45^0$ $\cos\frac{\pi}{6}$ $\sin\frac{\pi}{3}$ $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}$

$\cos\frac{\pi}{2}$ $\sin\frac{\pi}{2}$ $\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}$ $\sin\pi$

2. Синус какого угла равен $\frac{1}{2}$; 0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 1, если $\alpha\in[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$?

3. Косинус какого угла равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$; 0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$, если $\alpha\in[0; \pi]$?

II. Объяснение нового материала

III. Решение упражнений № 121–123, № 124, № 125, № 127, № 129, №131

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание

1. Из § 3 п. 8(2–5).
2. № 126, № 128, на стр. 94 № 21, № 22.
3. Выучить значения арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса.
4. Доказать тождество: $2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-3\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)+1=0$.

Решение.

Рассматривая выражение $\sin^6 x+\cos^6 x$ как сумму кубов, разложим его на множители и учтём, что $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Тогда левая часть приводится к виду $1-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2=0$.

УРОК № 3

Цели: закрепить понятия арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс и навыки вычисления их при решении более сложных упражнений. Научить пользоваться таблицами и микрокалькулятором для вычисления значений арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания: № 21, № 22 устно.

II. Решение упражнений № 132(а), № 133(а), № 134(а; г), № 135(а; в).

1. № 132(а).

Решение.

Пусть $\arcsin x_1 = b$, $\arcsin x_2 = c$, $x_1 \in [-1;1]$, $x_2 \in [-1;1]$, $x_1 < x_2$.

Допустим, что $\arcsin x_1 > \arcsin x_2$ или $\arcsin x_2 = \arcsin x_1$ (т.е. $b > c$ или $b = c$). По определению $x_1 = \sin b$ и $x_2 = \sin c$. В силу того, что функция синус возрастает на $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, из неравенства $b > c$ (или равенства $b = c$) следует, что $\sin b > \sin c$ (или $\sin b = \sin c$) т.е. $x_1 > x_2$ (или $x_1 = x_2$), что противоречит условию. Значит $b < c$, то есть $\arcsin x_1 < \arcsin x_2$.

III. Показать вычисление значений арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса с помощью микрокалькулятора и таблиц Брадиса. Выполнить упражнение № 130.

IV. Познакомить учащихся с тождествами

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, если $|x| \le 1$

$\sin(\arcsin x) = x$, если $-1 \le x \le 1$

$\cos(\arccos x) = x$, если $-1 \le x \le 1$

$\arcsin(\sin x) = x$, если $|x| \le \frac{\pi}{2}$

$\arccos(\cos x) = x$, если $0 \le x \le \pi$

$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg} x) = x$, если $|x| < \frac{\pi}{2}$

$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg} x) = x$, для любого действительного x

$\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}x) = x$, для любого действительного x

$\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}x) = x$, если $0 < x < \pi$

$\mathrm{arctg}x + \mathrm{arcctg}x = \frac{\pi}{2}$

V. Итоги урока

VI. Домашнее задание

1. Из § 3 п. 8; № 132(б), № 133(б), № 134(б; в), № 135(б; г).

2. Вычислите: а) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$; б) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right) + \arcsin\frac{4}{5}\right)$;

в) $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{7}\right)$; г) $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$; д) $\arccos\left(\cos\frac{6\pi}{5}\right)$;

е) $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)$.

Ответ: а) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; б) $\frac{63}{65}$; в) $\frac{8\sqrt{3}}{49}$; г) $-\frac{\pi}{7}$; д) $\frac{4\pi}{5}$; е) $\frac{7\pi}{18}$.

РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (3Ч)

УРОК № 1

Цели: ввести формулы корней простейших тригонометрических уравнений вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg}x = a$ и рассмотреть примеры решений простейших тригонометрических уравнений.

Ход урока

I. Объяснение нового материала

1. Рассмотреть пример решения уравнения $\cos t = 0{,}5$. Для нахождения решения вначале рассмотрим отрезок $[0; \pi]$, на котором функция косинус убывает, следовательно, уравнение $\cos t = 0{,}5$ имеет единственное решение. По определению этим числом будет $t_1 = \arccos 0{,}5 = \frac{\pi}{3}$, которое отметим на окружности.

Такое же значение косинуса будет и в точке $-t_1 = -\arccos 0{,}5 = -\frac{\pi}{3}$, что следует из чётности косинуса (точки симметричны относительно оси OX). Итак, в пределах одной окружности данное уравнение имеет два решения: $t_1 = \frac{\pi}{3}$ и $-t_1 = -\frac{\pi}{3}$. Учитывая, что функция косинус периодическая, запишем все решения уравнения: $t = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

2. Вывод формулы решений уравнения $\cos t = a$ при $|a| \le 1$. Особая форма записи решений этого уравнения при a, равном 1, –1, 0.

3. Вывод формулы решений уравнений $\sin t = a$, $\operatorname{tg} t = a$ и особая форма записи решений этого уравнения.

II. Решение упражнений № 136, №138, №140

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание

1. Из § 3 п. 9.
2. Выучить формулы корней и особые решения; № 137, № 139, № 141.
3. Вычислить: $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \cos\left(-3\arcsin\frac{1}{2}\right)\right)$.

Решение.

Пусть $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \alpha$, тогда $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ и $\alpha \in [0; \pi]$.

Следовательно, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Аналогично, пусть $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \beta$, $\beta = -\frac{\pi}{6}$.

пусть $\arcsin\frac{1}{2} = \gamma$, $\gamma = \frac{\pi}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

УРОК № 2

Цели: проверить знание учащимися формул корней простейших тригонометрических уравнений и особую форму записи решений уравнений. Закре-

пить навыки решения уравнений.

Ход урока

I. Математический диктант

I вариант	*II вариант*
1. Сформулируйте определение:	
а) арксинуса числа;	а) арккосинуса числа;
б) арккотангенса числа.	б) арктангенса числа
2. Для каких чисел определён	
арккосинус	арксинус
3. Записать формулу корней уравнения	
$\sin x = a$	$\cos x = a$
4. Записать особую форму записи решений уравнений	
$\cos x = a$	$\sin x = a$
5. Записать формулу корней уравнений $\mathrm{tg}\,x = a$.	При каких значениях a уравнения $\sin x = a$, $\cos x = a$ имеют решения.

II. Решение упражнений № 144(а; в), № 145(а; в; г), № 147(а; в), № 143(а; б).

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание

1. Из § 3 п. 9; № 144(б), № 146(а; б; в), № 147(б; г).

2. Решить уравнение: а) $2\cos^2 3x - \cos 3x = 0$; б) $\cos\left(\frac{x}{2} - 1\right) = \cos^2\left(1 - \frac{x}{2}\right)$;

в) $\sin^2 3x + \sin x + \cos^2 3x = 0$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$; $\pm\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}, k \in Z$; б) $2 + \pi + 2\pi k$; $2 + 4\pi k, k \in Z$;

в) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

УРОК № 3

Цели: способствовать развитию навыка самостоятельного применения знаний при решении уравнений.

Ход урока

I. Итоги математического диктанта

II. Самостоятельная работа (10 минут). Программированный контроль

Задание		*Ответ. ($k \in Z$)*			
Вариант I	Вариант II	1	2	3	4
$\sin x = -\frac{1}{2}$	$\sin x = \frac{1}{2}$	$(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$	$(-1)^k \frac{\pi}{6} + 2\pi k$	$(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$	$\frac{\pi}{6} + 2\pi k$
$\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k$	$(-1)^{k+1} \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k$	$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k$	$-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k$
$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$	$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$	$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$	$-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$	$-\frac{\pi}{6} + \pi k$	$\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

Верный ответ: для варианта I – 3, 1, 2; для варианта II –1, 2, 4.

III. Организовать работу в группах с теми, кто хорошо усвоил учебный материал: № 148, № 149, № 150, № 144(г). Взять тетради на проверку.
С теми, кто болел или плохо усвоил материал, в это время можно позаниматься отдельно: № 142, № 143(в, г), № 145(б), № 146(г).

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание
1. Из § 3 п. 9; № 23, стр. 94.

2*. Решить уравнение $\operatorname{tg}3x\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)(\operatorname{tg}x-1)\left(\operatorname{tg}2x-\sqrt{3}\right)\left(\operatorname{tg}x^2-\frac{1}{3}\right)=0.$

Указания:

Область определения данного уравнения: $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z; \\ x \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z; \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z; \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z. \end{cases}$

Чтобы решить данное уравнение, надо приравнять каждый сомножитель к нулю и решить получившиеся уравнения. Нанести все исключённые точки и найденные корни уравнения на единичную окружность и из множества полученных корней отобрать корни данного уравнения.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k;\ x = 2\pi k, k \in Z.$

РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ (3 ч)

УРОК № 1

Цели: на конкретных примерах с помощью единичной окружности показать решение простейших неравенств вида $\sin x<a$, $\sin x>a$, $\cos x<a$, $\cos x>a$, $\operatorname{tg} x<a$, $\operatorname{tg} x>a$. Научить решать такие неравенства.

Ход урока

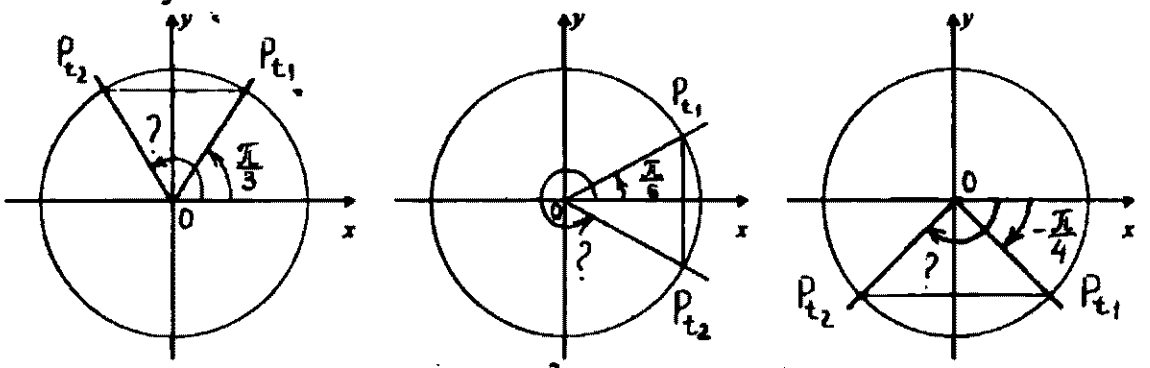
I. Анализ проверки рабочих тетрадей

II. Устная работа

1. На модели тригонометрического круга показать углы:

$-\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$; $-\frac{3\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{4\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$.

2. Назвать угол.



3. Решить неравенства $2x + 3 > 1$; $x^2 < 25$. Что значит решить неравенство?

III. Объяснение нового материала и его закрепление

Рассмотреть на конкретных примерах решение тригонометрических неравенств: № 151(а), № 152(б), № 153(в; г).

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание

1. Из § 3 п. 10 (примеры 1–4); № 151(б; в), №152(в; г), №153(б), № 154(а; г), № 155(в; г).

2*. Найти значение x:

а) $\arcsin 2x = -\frac{\pi}{6}$; б) $\arcsin\left(x^2+3\right) = \frac{\pi}{2}$; в) $\arccos(x-1) - \frac{2\pi}{3} = 0$.

УРОК № 2

Цели: закрепить навык решения тригонометрических неравенств на более сложных примерах.

Ход урока

I. Устная проверка домашнего задания

II. Решение упражнений (можно организовать работу на закрытых досках, групповую работу сильных учащихся, взаимопроверку).

1. № 156(а; г)

Ответы: а) $\frac{\pi}{3}+\pi k \le x < -\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in Z$; г) $-\frac{\pi}{2}+\pi k < x < -\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k \in Z$.

2. № 157(а; г)

Ответы: а) $-\frac{\pi}{3}+2\pi k \le x \le \frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k \in Z$; г) $-\frac{\pi}{6}+\pi k \le x < \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in Z$.

3. № 158(в; г) Ответы: в) $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k \le x \le -\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k \in Z$;

г) $\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{5} \le x < \frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5},\ k \in Z$.

4. № 159(а; в)

Ответы: а) $\pi k \le x \le \frac{2\pi}{3}+\pi k,\ k \in Z$; в) $4\pi k \le x \le \pi+4\pi k,\ k \in Z$.

5. № 160(а; г) Ответы: а) $-\pi+2\pi k \le x \le \frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k \in Z$;

г) $\frac{17\pi}{24}+2\pi k < x < \frac{25\pi}{24}+2\pi k,\ k \in Z$.

6. № 161(г) Ответ: г) $-\frac{\pi}{3}+2\pi k < x < \pi+2\pi k,\ k \in Z$.

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание

1. Из § 3 п. 10 (примеры 5, 6); № 158(а; б), № 159(б; г), № 160(а; г), №161.
2. Подготовиться к самостоятельной работе.

3*. Решить неравенство: $6\sin^2 x-5\sin x+1 \ge 0$.

Указание: разложить на множители: $6\left(\sin x-\frac{1}{3}\right)\left(\sin x-\frac{1}{2}\right) \ge 0$;

$\sin x \le \frac{1}{3}$ и $\sin x \ge \frac{1}{2}$.

Решением данного неравенства являются значения x, удовлетворяющие этим неравенствам.

Ответ: $-\pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k \le x \le \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k$ и

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k \le x \le \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$$

УРОК № 3

Цели: показать решение более сложных тригонометрических неравенств и проверить навыки и умения решений тригонометрических неравенств.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 \ge 0$

II. Решение упражнений

1. Решить неравенство: $\frac{15}{\cos x + 1} < 11 - 2\cos x$.

Введём новую переменную $y = \cos x$:

$$\frac{15}{y+1} < 11 - 2y; \quad \frac{2(y-4)\left(y - \frac{1}{2}\right)}{y+1} < 0; \qquad y < -1 \text{ и } \frac{1}{2} < y < 4.$$

Неравенство $\cos x < -1$ решений не имеет, т.к. $-1 \le \cos x \le 1$, неравенство $\frac{1}{2} < \cos x < 4$ надо заменить неравенством $\frac{1}{2} < \cos x \le 1$.

Ответ: $2\pi k - \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

2. Решить неравенство: $\sin x \le \cos^2 x$.

Ответ: $2\pi k - \pi - \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} \le x \le \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

III. Самостоятельная работа

Решить неравенства.

Вариант I

а) $\operatorname{tg}3x \geq -\sqrt{3}$; Ответы: а) $\left[-\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}; \frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}\right)$, $k \in Z$;

б) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)$, $k \in Z$;

в) $\cos x < \frac{1}{2}$. в) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{5\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k \in Z$.

Вариант II

а) $\operatorname{tg}3x < 1$; Ответы: а) $\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}; \frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}\right)$, $k \in Z$;

б) $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k \in Z$;

в) $\sin 2x < -\frac{1}{2}$. в) $\left(-\frac{5\pi}{12}+\pi k; -\frac{\pi}{12}+\pi k\right)$, $k \in Z$.

Вариант III

а) $\operatorname{tg}\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{\sqrt{3}}$; Ответы: а) $\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}; \frac{5\pi}{36}+\frac{\pi k}{3}\right)$, $k \in Z$;

б) $\sin\frac{x}{2} \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\left[-\frac{3\pi}{2}+4\pi k; -\frac{\pi}{2}+4\pi k\right]$, $k \in Z$;

в) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$. в) $\left[-\frac{7\pi}{24}+\pi k; \frac{11\pi}{24}+\pi k\right]$, $k \in Z$.

Вариант IV

а) $\cos 3x < \frac{1}{2}$; Ответы: а) $\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}; \frac{5\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}\right)$, $k \in Z$;

б) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}-1\right) \leq -1$; б) $\left[3-\frac{3\pi}{2}+3\pi k; 3-\frac{3\pi}{4}+3\pi k\right]$, $k \in Z$;

в) $\sin 2x > \frac{\sqrt{2}}{2}$. в) $\left(\frac{\pi}{8}+\pi k; \frac{3\pi}{8}+\pi k\right)$, $k \in Z$.

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание: из § 3 п. 10; № 162, № 163.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ (5 ч)

УРОК № 1

Цели: рассмотреть решение тригонометрических уравнений, приводимых к квадратному, а также методом группировки и разложением на множители.

Ход урока

I. Итоги самостоятельной работы

II. Объяснение нового материала

1. № 164(а), № 165(б), № 167(б), № 168(а; б). Все упражнения решает учитель с привлечением учащихся.

2. $2\sin^3 x - \cos 2x - \sin x = 0$.

Указания: $\sin x(2\sin^2 x - 1) - (1 - 2\sin^2 x) = 0$; $(2\sin^2 x - 1)(\sin x + 1) = 0$;

$-(1 - 2\sin^2 x)(\sin x + 1) = 0$; $-\cos 2x(\sin x + 1) = 0$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

III. Решение упражнений

Учащиеся решают самостоятельно с последующей фронтальной проверкой № 164(б), № 165(г), № 168(в; г).

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание: из § 3 п. 11 (примеры 1–3); № 164(в; г), № 165(а; в), № 167(б).

УРОК № 2

Цель: рассмотреть решение однородных тригонометрических уравнений и уравнений, приводимых к ним.

Ход урока

I. Объяснение нового материала

1. Уравнение, в котором каждое слагаемое имеет одну и ту же степень, называется *однородным*.

$a\sin f(x)+b\cos f(x)=0,\ \ a\neq 0, b\neq 0.$

$a\sin^2 f(x)+b\sin f(x)\cos f(x)+k\cos^2 f(x)=0,\ \ a\neq 0, b\neq 0, k\neq 0.$

Его можно решать делением на старшую степень синуса или косинуса. При этом мы не теряем корней, т.к. если мы в данное уравнение подставим $\cos x=0$, то получим, что $\sin x=0$, что невозможно ($\sin^2 x+\cos^2 x=1$).

2. Рассматривается решение уравнений вида

$a\sin x+b\cos x=0,\ \ a\neq 0, b\neq 0.$

1. № 171(в).

$\sin x+\sqrt{3}\cos x=0.$ Разделим каждое слагаемое на $\cos x$, получим:

$\frac{\sin x}{\cos x}+\sqrt{3}=0;\ \ \mathrm{tg}x=-\sqrt{3};\ \ x=-\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z.$

3. Рассматривается решение уравнений вида:

$a\sin^2 f(x)+b\sin f(x)\cos f(x)+k\cos^2 f(x)=0,\ \ a\neq 0, b\neq 0, k\neq 0.$

1. № 169(а; г).

а) $3\sin^2 x+\sin x\cos x=2\cos^2 x.$ Разделим каждое слагаемое на $\cos^2 x$, получим: $\frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}=\frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x};\ \ 3\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{tg}x-2=0;$

Ответ: $x=\mathrm{arctg}\frac{2}{3}+\pi k;\ \ x=-\frac{\pi}{4}+\pi k.$

4. Рассматривается решение уравнений вида:

$a\sin^2 f(x)+b\sin f(x)\cos f(x)+k\cos^2 f(x)+d=0,\ \ a\neq 0, b\neq 0, k\neq 0.$

Заменим d на $d\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)$ и получим однородное уравнение.

№ 170(а).

$\cos^2 x+3\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x=1.$ Ответ: $x=\pi n;\ x=-\frac{\pi}{3}+\pi k.$

II. Решение упражнений

1. № 170(г).

2. $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0.$ Ответ: $-\frac{5\pi}{12}+\pi k, k\in Z.$

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание

1. Из § 3 п. 11 (примеры 4–6); № 169 (б; в).

2. $6\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 3$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$; $x = \operatorname{arctg}(-2) + \pi k, k \in Z$.

3. $\sin 3x + \cos 3x = 0$. Ответ: $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12}k, k \in Z$.

4. Повторить формулы тригонометрии.

УРОК № 3

Цель: рассмотреть тригонометрические уравнения, решаемые с помощью формул сложения, понижения степени и других.

Ход урока

I. Проверка домашней работы

II. Решение упражнений

Универсальная подстановка

1. № 172(а). Делаем замену: $\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ и $\cos 2x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

Ответ: $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$.

Понижение степени

1. № 173(а). Делаем замену: $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$; $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

$\sin^2 x + \cos^2 2x + \sin^2 3x = 1{,}5$;

$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = \frac{3}{2}$;

$\cos 2x + \cos 6x - \cos 4x = 0$;

применим формулу: $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

$2\cos 4x\cdot\cos 2x - \cos 4x = 0$; $\cos 4x(2\cos 2x - 1) = 0$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

Решение с помощью формул сложения,
формул суммы и разности синусов (косинусов)

1. $2\sin 11x + \sqrt{3}\sin 5x + \cos 5x = 0$.

Разделим левую и правую части этого уравнения на 2, получим:

$$\sin 11x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 5x + \frac{1}{2}\cos 5x = 0.$$

Так как $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$, а $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$, то это уравнение примет вид:

$$\sin 11x + \cos\frac{\pi}{6}\sin 5x + \sin\frac{\pi}{6}\cos 5x = 0;$$

$$\sin 11x + \sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) = 0; \quad 2\sin\frac{11x + 5x + \frac{\pi}{6}}{2}\cdot\cos\frac{11x - 5x - \frac{\pi}{6}}{2} = 0.$$

Ответ: $x = \frac{\pi k}{8} - \frac{\pi}{96}$; $x = \frac{7\pi}{36} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z.$

2. № 174(г).

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание

1. Из § 3 п. 11 (примеры 3, 7); подготовиться к самостоятельной работе.
2. № 172(б), № 170(б), № 171(б) (рассмотреть пример 3), № 173 и попробовать решить:

а) $2\sin 17x + \sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x = 0.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{66} + \frac{\pi k}{11}$; $x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{6}, k \in Z;$

б) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, k \in Z$;

в) $\sin x \sin 2x \sin 3x = 0{,}25\sin 4x.$

Ответ: $x = \frac{\pi k}{2}$; $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z.$

УРОК № 4

Цель: способствовать развитию навыков самостоятельного применения знаний при решении тригонометрических уравнений.

Ход урока

I. Устно

1. Среди уравнений, данных на доске, выбрать те, которые решаются

а) приведением к квадратному (ответ: № 4, 10, 8);
б) как однородные (ответ: № 1, 5, 9);
в) понижением порядка (ответ: № 2);
г) с помощью формул суммы и разности (ответ: № 6, 7);
д) с помощью универсальной подстановки (ответ: № 11).

1) $2\sin^2 x+\cos^2 x=5\sin x\cos x$; 2) $\sin^2 x+\cos^2 2x+\sin^2 3x=\frac{3}{2}$;

3) $\cos x\cdot\sin 7x=\cos 3x\cdot\sin 5x$; 4) $\sin^2 x-2\sin x-3=0$;

5) $\sqrt{2}\cos x-\sin x=0$; 6) $\sin x+\sin 3x=\sin 5x-\sin x$;

7) $\sin x-\sin 2x+\sin 3x-\sin 4x=0$;

8) $2\cos^2 x+3\sin^2 x+2\cos x=0$;

9) $\cos^2 x+3\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x=3$;

10) $\sin^2 x-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin 2x=\cos^2 x$;

11) $\sin x+\cos x=1$.

С помощью какой формулы решается уравнение № 3 ?

2. Решим уравнение № 11.

$$\sin x+\cos x=1;\quad 2\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}=1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2};\quad -2\mathrm{tg}\frac{x}{2}\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1\right)=0;$$

$$x_1=2\pi k,\ x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z.$$

При универсальной подстановке может произойти потеря решений, т.к. D(sin), D(cos), D(tg) разные, потому лучше решить иначе.

Метод вспомогательного аргумента состоит в преобразовании выражения $a\sin x\pm b\sin x$ к виду $\sqrt{a^2+b^2}\sin(x\pm\varphi)$, где $\varphi=\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Решим уравнение:

$5\sin x=3-2\cos x\quad a=5, b=2;$

$$\sqrt{29}\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\sin x+\frac{2}{\sqrt{29}}\cos x\right)=3;$$

$$x=-\arcsin\frac{2}{\sqrt{29}}+(-1)^n\arcsin\frac{3}{\sqrt{29}}+\pi n, n\in Z.$$

II. Самостоятельная работа

Решить уравнения:

Вариант I

а) $2\cos^2 x + 2\sin x = 2{,}5$; Ответы: а) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$;

б) $\sin 2x = -\cos 2x$; б) $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$;

в) $\sin 2x = 2\sqrt{3}\sin^2 x$; в) πk; $\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$;

г) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$. г) $\frac{7\pi}{12} + 2\pi k$, $\frac{\pi}{12} + 2\pi k, k \in Z$.

Вариант II

а) $2\sin^2 x - 2\cos x = \frac{5}{2}$; Ответы: а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$;

б) $\sqrt{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 3\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$; б) πk, $k \in Z$;

в) $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 0$; в) πk; $\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$;

г) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$. г) $2\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Вариант III

а) $2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0$; Ответы: а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$;

б) $1 - 2\sin 2x = 6\cos^2 x$; б) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg} 5 + \pi k, k \in Z$;

в) $(\cos x + \sin x)^2 = \cos 2x$; в) πk; $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$;

г) $\sin 2x - \sin 3x = 0$. г) $2\pi k$; $\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5}, k \in Z$.

Вариант IV

а) $\operatorname{ctg} x = -4 - 3\operatorname{tg} x$; Ответы: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$;

б) $1 + 2\sin 2x + 2\cos^2 x = 0$; б) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $-\operatorname{arctg} 3 + \pi k, k \in Z$;

в) $(\cos x - \sin x)^2 = \cos 2x$; в) πk; $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$;

г) $\cos 6x - \cos 8x = 1 - \cos 2x$. г) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$; $\frac{\pi k}{3}$; $\pi k, k \in Z$.

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание

1. Подготовка к контрольной работе (из § 3 п. 8 – 11).
2. Домашняя контрольная работа:

Вариант I

1. Решите уравнения:

а) $\sin 2x + 1 = 0$ Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

б) $\sin 2x + 2\cos^2 x = 0$ Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

2. Решите неравенства:

а) $\cos x \le -\frac{1}{2}$ Ответ: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le x \le \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

б) $\sin x \ge -\frac{\sqrt{3}}{2}$ Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \le x \le \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

3. Решите уравнения:

а) $7\sin^2 x = 8\sin x \cos x - \cos^2 x$ Ответ: $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

б) $\sin 4x - \sin 7x = 0$ Ответ: $x = -\frac{2}{3}\pi k$, $x = \pm\frac{\pi}{11} + \frac{2\pi k}{11}, k \in Z$.

Вариант II

1. Решите уравнения:

а) $\cos 2x - \frac{1}{2} = 0$ Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

б) $2\sin x \cos x = \cos x$ Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

2. Решите неравенства:

а) $\sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ Ответ: $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi k \le x \le \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

б) $\cos x \ge -\frac{1}{2}$ Ответ: $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le x \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

3. Решите уравнения:

а) $2\cos^2 2x - 1 = \sin 4x$ Ответ: $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z.$

б) $2\sin x + \cos x = 0$ Ответ: $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k, k \in Z.$

Вариант III

1. Решите уравнения:

а) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{8}\right) - \frac{1}{2} = 0$ Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}.$

б) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2}$ Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k;\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z.$

2. Решите неравенства:

а) $6\cos^2 x - 5\cos x + 1 \le 0$ Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi k \le x \le \arccos\frac{1}{3} + 2\pi k;.$

$-\arccos\frac{1}{3} + 2\pi k \le x \le -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$

б) $\frac{15}{\sin x + 1} < 11 - 2\sin x$ Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$

3. Решите уравнения:

а) $6\sin^2 x + \frac{3}{2}\sin 2x = 2\cos^2 x + 3$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ x = \operatorname{arctg}(-2) + \pi k, k \in Z.$

б) $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$ Ответ: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in Z.$

УРОК № 5

Цель: рассмотреть решение систем тригонометрических уравнений с двумя переменными.

Ход урока

I. Итоги самостоятельной работы. Анализ ошибок

II. Вопросы учащихся по домашней контрольной работе. (После того, как тетради собраны.)

III. Объяснение нового материала

1. Решить № 175(а), № 176(а) с привлечением учащихся (на доске).

№ 176(а)

$$\begin{cases}\sin x-\cos y=0,\\ \sin^2 x-\cos^2 y=2;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=\cos y,\\ 2\cos^2 y=2;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=\cos y,\\ \cos^2 y=1;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$1)\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=\cos y,\\ \cos y=1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=1,\\ \cos y=1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pi n,\ n\in Z\\ y=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z.\end{cases}$$

$$2)\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=\cos y,\\ \cos y=-1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=-1,\\ \cos y=-1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z\\ y=\pi+2\pi k,\ k\in Z.\end{cases}$$

IV. Решение упражнений

а) $\begin{cases}\sin x\cos y=-0{,}5,\\ \cos x\sin y=0{,}5.\end{cases}$

Складывая и вычитая уравнения системы, получаем равносильную систему:

$$\begin{cases}\sin x\cos y+\cos x\sin y=0,\\ \cos x\sin y-\sin x\cos y=1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin(x+y)=0,\\ \sin(y-x)=1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\pi n,\\ y-x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k,n\in Z.\end{cases}$$

Ответ: $x=-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}-\pi k;\ y=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}+\pi k,\ k,n\in Z.$

б) $$\begin{cases}\sin x\sin y=0{,}75,\\ \mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}y=3;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\sin y=0{,}75,\\ \dfrac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}=3;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\sin y=0{,}75,\\ \dfrac{0{,}75}{\cos x\cos y}=3;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\sin y=\dfrac{3}{4},\\ \cos x\cos y=\dfrac{1}{4};\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos(x-y)=1,\\ \cos(x+y)=-\dfrac{1}{2};\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=2\pi n, n\in Z,\\ x+y=\pm\dfrac{2}{3}\pi+2\pi k, k\in Z.\end{cases}$$

Ответ: $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi(k+n),\ y=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi(k-n),\ k,n\in Z.$

Решение этой системы, если не успели закончить в классе, продолжить дома.

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание: из § 3 п. 12; № 175(в), № 176(б; г); подготовиться к контрольной работе.

УРОК № 6

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Цели: выявление знаний учащихся и степени усвоения ими материала.

Ход урока

I. Организация учащихся на выполнение контрольной работы

II. Выполнение работы

Вариант I

1. Решите уравнения:

а) $1 + \sin x = 0$, б) $3\cos x - 2\sin^2 x = 0$.

2. Решите неравенство: $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Решите уравнения:

а) $1 + 3\sin^2 x = 2\sin 2x$, б) $\cos 4x - \cos 2x = 0$.

Вариант II

1. Решите уравнения:

а) $\cos x + 1 = 0$, б) $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$.

2. Решите неравенство: $\sin x \geq \frac{1}{2}$.

3. Решите уравнения:

а) $2\sin x\cos x = \cos 2x - 2\sin^2 x$, б) $3\sin x + \cos x = 1$.

III. Домашнее задание: повторить по учебнику геометрии геометрический смысл углового коэффициента.

ПРИРАЩЕНИЕ ФУНКЦИИ (1 Ч)

УРОК № 1

Цели: ввести понятия «приращение аргумента» и «приращение функции»; выработка умения вычисления их отношений, а также углового коэффициента секущей и средней скорости.

Ход урока

I. Анализ контрольной работы

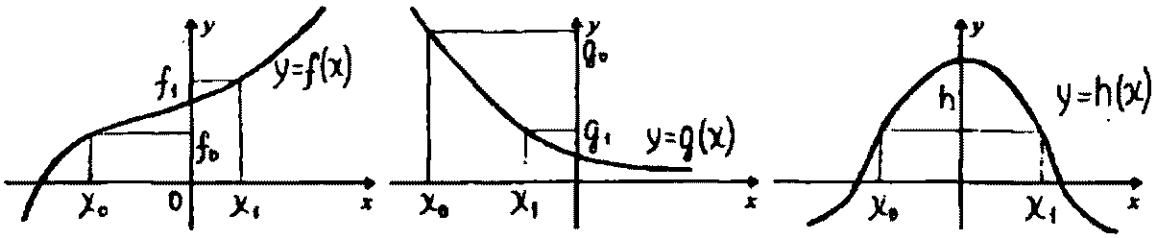
II. Объяснение нового материала

1. Введение понятий «приращение аргумента» и «приращение функции».

Закрепление:

а) № 178(а; б), № 179(а; г);

б) используя рисунки на доске, найдите приращение аргумента, приращение функции. Покажите их на рисунке (устно).



2. По рисункам показываются примеры секущих, и перед учениками ставится вопрос о том, как найти угловой коэффициент.

Работая фронтально с классом, получить формулу для углового коэффициента секущих.

3. Рассматривается средняя скорость, как отношение приращений.

II. Решение упражнений

№ 183, № 184, № 185, № 186(в; г), № 187(а).

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание

1. Из § 4 п. 12; № 180(а; в), № 181, № 186(а; б), № 187(б).

2. Практическая работа. Вычислить $f(x)$ и $g(x)$:

x	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	1	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
$f(x)=x^2$											
$g(x)=2x-1$											

ПОНЯТИЕ О ПРОИЗВОДНОЙ (2 Ч)

УРОК № 1

Лекция – беседа.

Цели: ввести понятие касательной к графику функции, производной и её

геометрического и механического смысла.

Ход урока

I. Объяснение нового материала

1. Попытайтесь дать определение касательной к графику функции.

2. Посмотрите на рис. 1 и убедитесь в том, что определение касательной как прямой, имеющей лишь одну общую точку с кривой, является неудачным. Какая из прямых – AB или CD – касается кривой в точке M ?

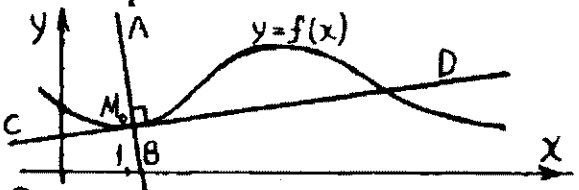


рис. 1

3. Следует ли считать понятия «прямая касается кривой» и «прямая пересекает кривую» взаимоисключающими ? (Ответ: нет.)

4. Что следует понимать под касательной к прямой линии ?

Рассмотрите графики различных функций на рис. 2.

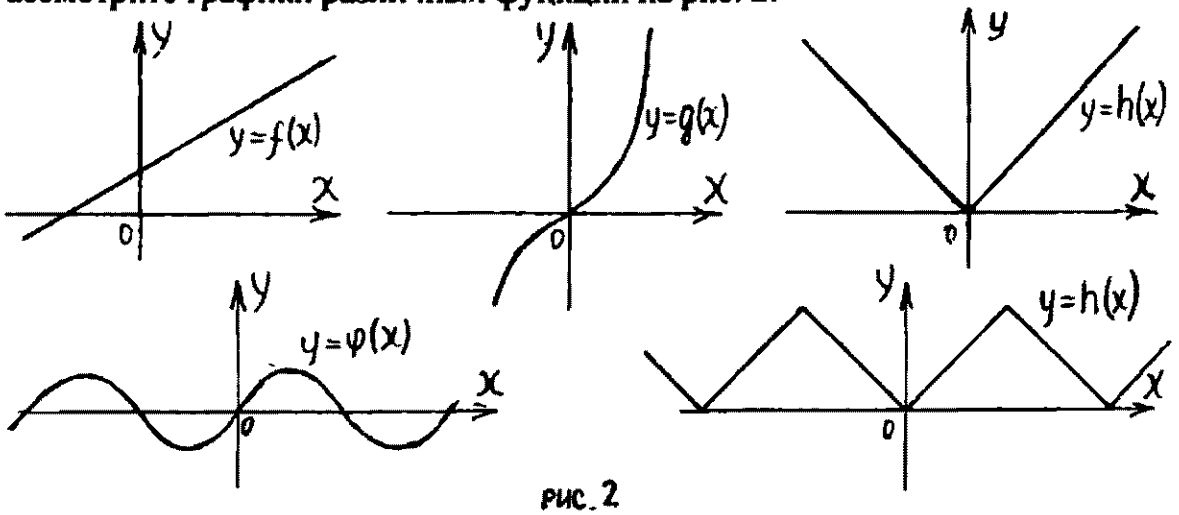


рис. 2

5. Далее можно показать учащимся примеры «гладких» кривых, а также тех кривых, которые «не являются гладкими».

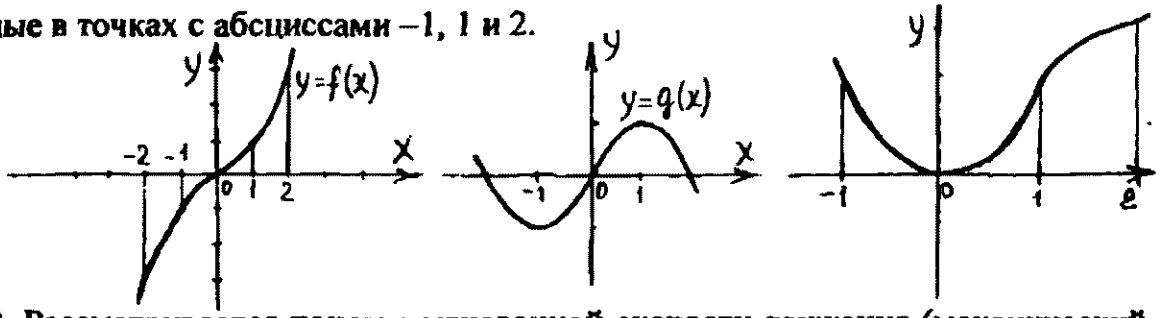
Перед учащимися ставится проблема: выяснить особенности устройства «гладкой» кривой. Для решения поставленной задачи предлагается проанализировать таблицу значений функций f и g из домашней работы. На основе рассуждений можно сформулировать *вывод*:

для «гладкой» кривой $f(x) = x^2$ для значений аргумента, близких к 1, можно подобрать такую прямую $g(x) = 2x - 1$, вдоль которой как бы «выстраиваются» точки графика $f(x)$.

6. Можно ли определить точное положение той прямой, вдоль отрезка которой «выстраиваются» точки графика «гладкой» кривой в окрестности некоторой точки x ? (Рассуждения из учебного пособия.)

7. Найденной прямой даётся название касательной, вводится производная как угловой коэффициент касательной (геометрический смысл производной).

8. На рис. 3 изображены графики функций f, g, h. Дома проведите касательные в точках с абсциссами –1, 1 и 2.



9. Рассматривается понятие мгновенной скорости движения (механический смысл производной).

10. Для выделения общего метода вычисления производной предлагается учащимся следующая схема:

а) задайте приращение аргумента;

б) найдите соответствующее ему приращение функции;

в) найдите отношение приращения функции к приращению аргумента;

г) найдите, к какому числу стремится $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, если считать, что Δx стремится к нулю.

11. Вводится понятие дифференцируемой функции в точке, её обозначение, а также название операции нахождения производной.

12. Выделяются формулы дифференцирования, полученные в ходе объяснения материала.

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание: из § 4 п. 13; № 188(б), № 191(а), № 192(а; б; г).

УРОК № 2

Цели: способствовать закреплению наглядных образов касательной и производной; выработка навыка нахождения производной по определению.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания

Устный опрос:

1. Какую прямую называют касательной к графику функции f в точке

$(x_0; f(x_0))$?

2. Что такое приращение аргумента и приращение функции ?

3. В чём состоит геометрический смысл приращения аргумента, приращения функции, отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$?

4. Для какой функции касательная к её графику совпадает с самим графиком ?

5. Что такое производная ?

6. Что такое производная с геометрической точки зрения ?

7. Что такое производная с механической точки зрения ?

II. Решение упражнений

1. Решить № 193(а; в), № 194(в; г), № 195(в), №196(а; г).

2. Далее работа группами: I-я и II-я группа сильных учащихся, а III-я средних самостоятельно выполняют упражнение.

Используя схему вычисления производной, найдите производные следующих функций:

I-я группа. $y = \sqrt[3]{x}$; $y = \frac{x}{x+2}$; $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$;

II-я группа. $y = \sqrt[3]{x^2}$; $y = \frac{x}{x+1}$; $y = \sqrt{x+1}$;

III-я группа. $y = 2x^2 + 3x$; $y = \sqrt{x}$; $y = \frac{1}{x^3}$.

Слабые учащиеся выполняют вместе с учителем № 194(а; б), № 196(в).

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание: из § 4 п. 13; № 1(а; б), № 2, № 3 на стр. 166.

ПОНЯТИЕ О НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ

УРОК № 1

Цели: познакомить учащихся с понятиями предельный переход, непрерывность функции в точке и правилами предельного перехода; закрепить их при решении упражнений.

Ход урока

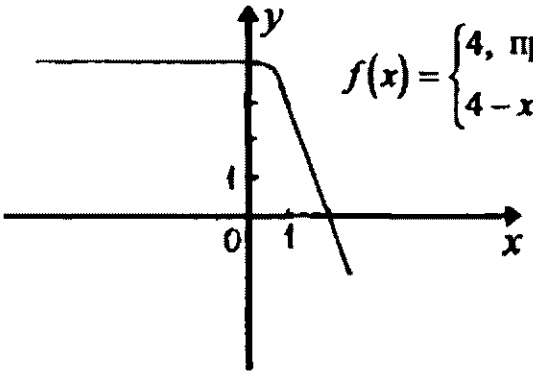
I. Объяснение нового материала. (Изложение материала учебного посо-

бия.)

II. Решение упражнений

Устно № 197; письменно № 198(г; б); устно № 199; письменно № 201(а); устно № 201(в; г); письменно № 203(г); письменно № 204; устно № 206; письменно № 207.

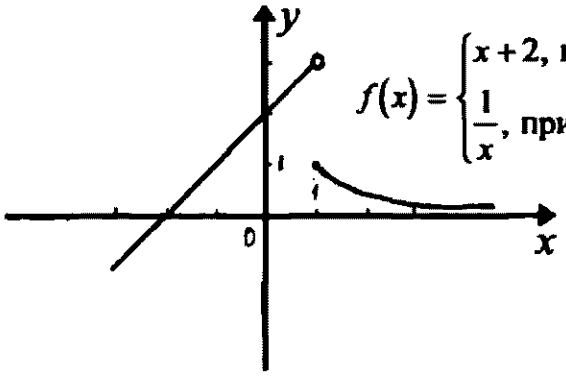
№ 198(б)



$$f(x)=\begin{cases}4, \text{ при } x<0;\\ 4-x^2, \text{ при } x\geq 0.\end{cases}$$

Ответ: не содержится точек разрыва.

№ 198(г)



$$f(x)=\begin{cases}x+2, \text{ при } x<1;\\ \dfrac{1}{x}, \text{ при } x\geq 1.\end{cases}$$

Ответ: $x = 1$ –точка разрыва.

№ 207(б)

$f(x)-g(x)\to A-B$.

Решение.

$-g(x)=-1\cdot g(x)\to -B$;

$f(x)+(-g(x))\to A+(-B)=A-B$.

№ 207(в)

$(f(x))^2-(g(x))^2\to A^2-B^2$.

Решение.

$(f(x))^2 = f(x)\cdot f(x) \to A\cdot A = A^2$; $(g(x))^2 = g(x)\cdot g(x) = B\cdot B = B^2$;

$(f(x))^2 - (g(x))^2 \to A^2 - B^2$.

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание: из § 4 п. 14; № 200(а; б), № 202, № 203(а; б; в), № 205.

ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ (4 Ч)

УРОК № 1

Цели: вывести правило дифференцирования суммы, доказать лемму и рассмотреть вывод формул дифференцируемости произведения, частного, степени.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания

1. Какую функцию называют дифференцируемой ?
2. Какую операцию называют дифференцированием ?
3. К какому числу стремятся функции $U(x)+V(x)$ и $U(x)\cdot V(x)$, если $U(x)\to 3$ при $x\to 1$, $V(x)\to -4$ при $x\to 1$?
4. Составьте план решения задачи на нахождение производной функции по определению.

II. Объяснение нового материала

План лекции.

1. Доказательство теоремы о производной суммы двух функций провести с привлечением учащихся, выделяя отдельные его этапы.
2. Доказательство леммы.
3. Формулировка правил нахождения производной произведения и частного. Примеры нахождения таких производных.
4. Доказательство правила нахождения производной степени. Примеры нахождения таких производных.

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание

1. Из § 4 п. 15.

2. Самостоятельно доказать, что постоянный множитель можно вносить за знак производной.
3. Сильным учащимся по желанию можно рассмотреть доказательство правил нахождения произведения и частного.

УРОК № 2

Цель: научить применять правила нахождения производной.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания

1. Записать правила дифференцирования на доске.
2. Устные упражнения:

а) $(3x)' =$ б) $(4x^2)' =$ в) $(x^{-5})' =$

г) $(\sqrt{x})' =$ д) $\left(\frac{1}{x}\right)' =$ е) $(x^2+3)' =$

II. Решение упражнений

№ 208. (Поочерёдно учащиеся громко диктуют классу решение.)

а) $2x+3x^2$; б) $-\frac{1}{x^2}+5$; в) $2x+3$; г) $3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

№ 209(а) (Решение учеником на доске с комментариями учителя.)

а) $-5x^4+8x^3+12x^2$.

№ 209(в; г) (Решение учащимися на закрытой доске, с последующей проверкой класса.)

в) $5x^4+9x^2$; г) $-8x^3+9x^2+2$.

№ 210(б) (Решение учеником на доске с комментариями учителя.)

№ 210(в; г) (На закрытой доске.)

в) $\frac{34}{(5x+8)^2}$; г) $\frac{4x^2-6x}{x^4}$.

№ 211(г), № 215. (Самостоятельно, помогают учителю проверить ученики–консультанты.)

№ 218, № 219.(Устно.)

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание: из § 4 п. 12–15 (подготовиться к зачёту); № 208(в), № 209(в), № 210(а), №211(а; б; в), № 212.

УРОК № 3

Цель: закрепление правил нахождения производных в ходе решения упражнений.

Ход урока

I. Устная работа

Найти производную:

1) $y=4x^4$; 2) $y=\frac{x^2}{2}$; 3) $y=\frac{2}{x}$; 4) $y=3\sqrt{x}$; 5) $y=\frac{1}{2x}$; 6) $y=\frac{\sqrt{x}}{2}$;

7) $y=\sqrt{2x}$; 8) $y=4-x^4$; 9) $y=x^3-x^2$; 10) $y=\frac{x^6}{2}$.

II. Решение упражнений

№ 213(в; г), № 214(б; в).

III. Работа группами

Найдите производную.

1 группа

а) $y=x^2+\sqrt[3]{x^2}$ Ответ: $y'=2x+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$;

б) $y=\frac{x^2-3x+1}{x^2+x+1}$ Ответ: $y'=\frac{x^2-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$;

в) $y=\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(x^2-3x-8\right)$ Ответ: $y'=3x^2-6x-8+\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{3}{2\sqrt{x}}+\frac{4}{x\sqrt{x}}$.

2 группа

а) $y=\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ Ответ: $y'=\frac{-\sqrt{x}}{\left(x-\sqrt{x}\right)^2}$;

б) $y=\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2+x+1\right)$ Ответ: $y'=3x^2+2x+2-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}$;

в) $y=x^3+\sqrt[3]{x^5}$ Ответ: $y'=3x^2+\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$.

3 группа

а) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ Ответ: $y'=\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$;

б) $y=\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}-1\right)$ Ответ: $y'=\frac{\sqrt{x}-2}{6\sqrt[3]{x^2}}$;

в) $y=x^7-\frac{8}{x^7}$ Ответ: $y'=7x^6+\frac{56}{x^8}$.

Со слабыми учащимися работает учитель на доске.

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание:

1. Из § 4 п. 15; № 217, № 213(а; б), № 214(а; г).
2. По желанию. Найти производную:

$$y=3\sqrt[3]{x^2}+2x\sqrt[3]{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^3;\quad y=\sqrt[3]{x^4}\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}\right).$$

3. Подготовиться к опросу по материалам § 4 п. 13–15 и самостоятельной работе.

УРОК № 4

Урок – зачёт.

Цель: проверить степень усвоения теоретического материала и навык нахождения производной.

Ход урока

I. Проверка теоретического материала в форме игры (20-25 мин.)

Класс разбивается на 2–3 равносильные команды. Выбирают командиров, выдаются вопросы для обсуждения.

Первая команда быстро выбирает вопрос, на который хотела бы услышать ответ. Другая команда решает, кто из них будет на этот вопрос отвечать. Если ответ не удовлетворяет или есть дополнение, то отвечает один ученик из первой команды.

Теперь вторая команда выбирает вопрос, слушает ответ на него и дополняет. И так далее. Отвечать на вопрос ученику можно только один раз. В результате все ученики принимают участие, командир должен правильно рассчитать силы команды. Учитель выставляет баллы за ответ, в помощь ему можно пригласить учеников из 11-го класса или сильных учащихся этого

же класса. Вопросы заранее не оглашаются, выдаются непосредственно на уроке. Состав команды тоже лучше представить на уроке.

Вопросы

1. Что такое приращение аргумента и приращение функции ? В чём состоит геометрический смысл приращений Δx и Δf , отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$?

2. Сформулируйте определение производной функции в точке. Дайте схему её нахождения по определению.

3. Что называется касательной к графику функции? Проведите касательные к графику функции в точках с абсциссами x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Отметьте угол, образованный этими касательными с положительным направлением оси OX, пользуясь этим, укажите знак производной в этих точках x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

4. Что такое производная с геометрической точки зрения ? Укажите приближённое значение производной в точке x_2.

5. Что такое производная с механической точки зрения ? Чем отличается мгновенная скорость от средней скорости ?

6. Что такое предельный переход ? Какая функция называется непрерывной в точке?

Дана функция $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{при } x > 0, \\ x-1 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$

Содержится ли в её области определения точка, в которой функция не является непрерывной ?

7. Какую функцию называют дифференцируемой ? Как называют операцию нахождения производной ? Доказать лемму.

8. Назовите правила нахождения производной суммы, произведения, частного и степени. Вывести формулу производной от суммы.

II. Самостоятельная работа (на 20 мин.)

Найти производную функции	Решить уравнение $f'(x)=0$ и неравенство $f'(x)>0$
Вариант I	
а) $f(x) = x^5 - 2\sqrt{x}$;	а) $f(x) = x^2 - 3x + 1$;
б) $f(x) = (5x-1)(4x+1)$.	б) $f(x) = \frac{x-3}{2x+5}$.
Ответ: а) $5x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}}$; б) $40x+1$.	Ответ: а) 1,5; $(1{,}5; +\infty)$; б) решений нет;

	$(-\infty;-2{,}5)\cup(-2{,}5;+\infty)$.

Вариант II

а) $f(x)=2x^7+4\sqrt{x}$;	а) $f(x)=x^2+3x-3$;
б) $f(x)=(5x^2+2)(4x-1)$	б) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+2}$.
Ответ: а) $14x^6+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$;	Ответ: а) $-1{,}5$; $(-1{,}5;+\infty)$;
б) $60x^2-10x+8$.	б) решений нет; $(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$.

Вариант III

а) $f(x)=4x^4\sqrt{x^3}$;	а) $f(x)=x^3+4x^2-3x$;
б) $f(x)=\left(x^4-\dfrac{1}{x^4}\right)\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)$.	б) $f(x)=\dfrac{2x}{1-x}$.
Ответ: а) $7\sqrt[4]{x^3}$;	Ответ: а) -3; $\dfrac{1}{3}$, $\left(-3;\dfrac{1}{3}\right)$;
б) $7x^6+7+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^8}$.	б) решений нет; $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Вариант IV

а) $f(x)=5x\sqrt[5]{x^4}$;	а) $f(x)=2x^3-9x^2+12x+7$;
б) $f(x)=\dfrac{4-x^2}{3+2x}$.	б) $f(x)=(x-1)\sqrt{x}$.
Ответ: а) $9\sqrt[5]{x^4}$;	Ответ: а) 1; 2, $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$;
б) $\dfrac{-2x^2+6x+8}{(3+2x)^2}$.	б) $\dfrac{1}{3}$; $\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание

1. Из § 4 п. 12–15.
2. Найти производную:

а) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{x}{\sqrt{x}-1}$ Ответ: $\dfrac{\sqrt{x}(x-3)}{(x-1)^2}$;

б) $y=(2x-3)(3x+1)$ Ответ: $12x-7$;

в) $y=\dfrac{3\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$ Ответ: $\dfrac{3}{\sqrt{x}\left(2+\sqrt{x}\right)^2}$;

г) $y=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$ Ответ: $\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

УРОК № 1

Цель: ввести понятие сложной функции и правило нахождения её производной.

Ход урока

I. Анализ самостоятельной работы

II. Объяснение нового материала

1. Объясните смысл знаков x, y, f в записи $y=f(x)$.
2. $y=x^2$. Каков закон образования этой функции ? Что в записи этой формулы выполняет роль знака f ?
3. Укажите закон образования функций:

$y_1=2x$; $y_2=x+2$; $y_3=x$; $y_4=2$ $(y=0\cdot x+2)$;

$y_5=-x$; $y_6=0$; $y_7=-\dfrac{1}{x}$; $y_8=\sqrt{x}$; $y_9=3+x^2$.

Для каких из перечисленных функций верно равенство $2f(x)=f(2x)$, $x\in D(f)$?

Пусть нам необходимо вычислить производную некоторой функции. Последовательность рассуждений может быть такой.

Можно ли данную функцию квалифицировать как линейную, квадратичную, степенную ? Если да, то её производная берётся согласно известным формулам. Если нет, то можно ли данную функцию представить в виде суммы, произведения или частного указанных функций ? Если да, то мы включаем в работу соответствующие формулы. Если нет, то надо рассмотреть данную функцию как сложную.

Каков закон образования функции $y=\sqrt{3-x}$?

Перед нами сложная функция: степенная от линейной.

А каков закон образования функции $y=\sqrt{3}-\sqrt{x}$?

Классифицируйте функции. Найдите их области определения. Производные каких функций вы сумеете найти ?

а)	$y_1=-1$; $y_6=y_3+y_4$;	$y_2=-x$; $y_7=y_3\cdot y_4$;	$y_3=\sqrt{x}$; $y_8=\sqrt{-x^2}$	$y_4=\sqrt{-x}$;	$y_5=-\sqrt{x}$;
б)	$y_1=\sqrt{1-x}$; $y_6=\sqrt{1-x^2}$;	$y_2=\sqrt{x-1}$; $y_7=\sqrt{(1-x)^2}$;	$y_3=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$; $y_8=\sqrt{3}$	$y_4=\sqrt{(1-x)^3}$;	$y_5=\sqrt{1-x^3}$;

Можно ли сказать, что $y=\sqrt{3}$

а) линейная функция ?

б) степенная функция ?

в) сложная функция: степенная от линейной ?

4. Вводится понятие сложной функции.

5. Рассматривается вывод формулы производной сложной функции.

III. Решение упражнений

№ 224(в; б) вместе с учителем; № 224(а; г) с использованием закрытой доски; №225 самостоятельно, с последующим обсуждением результатов; № 227(а; б).

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание: из § 4 п.16; № 222(в; б), № 223, № 224(а; г), № 227(в; б).

УРОК № 2

Цели: закрепить навык нахождения производной сложной функции, проверить умение находить производную сложной функции.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания

1. Какая функция называется сложной? Приведите примеры сложных функций.

2. Найдите область определения данных сложных функций:

$$y=\frac{1}{\sin x};\qquad g(x)=\frac{1}{\sqrt{5x}};\qquad y(x)=\sqrt{2x-1}.$$

Ответ: $x \neq \pi k$; $x > 0$; $x \geq \frac{1}{2}$.

3. Приведите правило дифференцирования сложной функции.

4. Вычислите производную функции:

$y = (1-x)^2$; $y = (1-x)^{-1}$; $y = \frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}$.

Ответ: $-2(1-x)$; $(1-x)^{-2}$; $-\frac{3}{\sqrt{(2x+1)^5}}$.

II. Решение упражнений

№ 226(а; б)

Ответ: а) $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right], n \in Z$; б) $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

№ 228(а; г)

Ответ: а) $x \neq 2\pi k, k \in Z$; г) $(1;+\infty)$.

№ 230(а; б)

Ответ: а) $(17x^2-28x)(x^3-2x^2+3)^{16}$; б) $-\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}-\frac{2x}{(x^2+3)^2}$.

III. Самостоятельная работа (10 мин.). (Программированный контроль.)

Задания		Варианты ответов			
Вариант I	*Вариант II*	1	2	3	4
$f(x) = (2x+3)^{12}$ Найти $f(-2)$	$f(x) = (5+6x)^{10}$ Найти $f(-1)$	-52	-60	30	-24
$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-25}}{x+7}$ Найти D(f)	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+9}}$ Найти D(f)	$(-\infty;2)\cup(-7;-5)\cup(5;+\infty)$	$(-5;5)$	$(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$	$(-5;5)$ $x \neq 7$
$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$; $g(x) = \sqrt{x}$ Составьте: а) $f(g(x))$	$f(x) = \frac{x}{x-1}$; $g(x) = \sqrt{x}$ Составьте: а) $f(g(x))$	$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}}$	$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

б) $g(f(x))$	б) $g(f(x))$	$\frac{\sqrt{x}}{x-1}$	$\sqrt{\frac{x}{x-1}}$	$\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$	$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+2}$

Ответ: вариант I – 4, 1, 2, 3; вариант II –2, 3, 4, 2.

Результаты фронтального опроса учащихся помогут учителю выяснить, какие из заданий вызвали затруднения у учащихся. Это видно по неверно названной цифре. Далее проводится устная работа по устранению ошибок учащихся.

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание: из § 4 п. 16; № 229, № 230(в; г), № 226(в; г), № 228(б; в).

ПРОИЗВОДНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

УРОК 1

Цель: ввести формулы производных тригонометрических функций.

Ход урока

I. Объяснение нового материала

1. Практическая работа.

Вариант I. Найдите, к чему стремится отношение $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$.

Вариант II. Сравните значения $\cos(x_0 + \Delta x)$ и $\cos x$ при $\Delta x \to 0$. Укажите, к какому значению стремится $\cos(x_0 + \Delta x)$.

Для ускорения работы можно дать учащимся конкретные значения $\sin x$, x, x_0 и Δx.

2. Вывод формулы производной синуса с привлечением учащихся.

3. Ставится проблема: как, зная формулу производной синуса и формулы приведения, вывести формулу производной косинуса. Предлагается учащимся самостоятельно записать вывод.

4. Учащиеся самостоятельно получают формулы производных тангенса и котангенса, предварительно обсудив возможный план вывода.

II. Решение упражнений

№ 231(а; г), № 232(а; г), № 233(а; б).

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание: из § 4 п.17; № 231(б; в), № 232(б; в), № 233(в; г), № 234.

УРОК № 2

Цели: закрепить навык нахождения производных тригонометрических функций.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания

1. Найти производную функции (устно):

а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$; в) $y = \mathrm{tg}x$; г) $y = \mathrm{ctg}x$; д) $y = 3\sin 4x$;

е) $y = \cos^2 2x$; ж) $y = \sqrt{\mathrm{tg}x}$; з) $y = \sin(5x+1)$; и) $y = \mathrm{ctg}^2(2x+5)$.

Ответ: д) $y' = 12\cos 4x$; е) $y' = 2\sin 4x$; ж) $y' = \dfrac{1}{2\cos^2 x\sqrt{\mathrm{tg}x}}$;

з) $y' = 5\cos(5x+1)$; и) $y' = \dfrac{4\mathrm{ctg}(2x+5)}{\sin^2 x}$.

2. Выборочно проверить домашнюю работу в тетрадях.

II. Закрепление

№ 235 (учащиеся на месте пишут и диктуют решение классу).

№ 236(а; г) (с использованием закрытой доски).

№ 237(б; г) (самостоятельно с последующей проверкой).

№ 238(а; б; г). Эти примеры учащиеся решают самостоятельно, обсудив возможный план решения.

а) $f(x) = \cos 2x\sin x + \sin 2x\cos x = \sin(2x+x) = \sin 3x$;

$f'(x) = (\sin 3x)' = 3\cos 3x$.

б) $f(x) = \cos^2\dfrac{x}{4} - \sin^2\dfrac{x}{4} = \cos\dfrac{x}{2}$; $f'(x) = \left(\cos\dfrac{x}{2}\right)' = -\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}$.

г) $f(x) = \sin 3x\cos 3x = \dfrac{1}{2}\sin 6x$; $f'(x) = 3\cos 6x$.

№ 239(а; б) (с использованием закрытой доски).

№ 240(а; в) (устно).

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание: из§ 4 п.17; № 236(б; в), № 237(а; в), № 238(в), № 239(в; г); подготовиться к самостоятельной работе.

УРОК № 3.

Цели: проверить навык нахождения производной тригонометрических функций.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания

1. Объяснить учащимся решение заданий, вызвавших у них затруднения.
2. Устные упражнения.

Найдите производные функций:

а) $g(x) = \sin x + 14$; $h(x) = x^2 + \sin x$; $\varphi(x) = -17\sin x + 1$.

б) $f(x) = \cos x - 13$; $g(x) = 3\cos x$; $h(x) = \sin x - \cos x$;

$\varphi(x) = \mathrm{tg}x + 19$; $f(x) = \cos(4x - 11)$.

II. Программируемый контроль (10 минут)

Найти производную	
Вариант I	*Вариант II*
а) $f(x) = \sin 2x - \cos 3x$	а) $f(x) = \cos 2x - \sin 3x$
б) $f(x) = \mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$	б) $f(x) = \mathrm{ctg}x + \mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
в) $f(x) = \sin^2 x$	в) $f(x) = \cos^2 x$

Варианты ответов				
	1	2	3	4
а)	$\cos 2x - \sin 3x$	$2\sin 3x - 3\cos 3x$	$-2\sin 2x - 3\cos 3x$	$2\cos 2x + 3\sin 3x$
б)	$\frac{1}{\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$	$\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$	$\frac{1}{\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} - \frac{1}{\sin^2 x}$
в)	$2\sin x\cos x$	$-2\sin 2x$	$\sin 2x$	$2\cos x$

Верный ответ: вариант I – 4, 2, 3; вариант II – 3, 4, 2.

Те, кто хорошо усвоил материал, имеет хорошие навыки решения таких упражнений, выполняют самостоятельную работу.

С остальными индивидуальная работа.

Самостоятельная работа

Найти производную.

Вариант I

а) $y=\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$, вычислить $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ Ответ: $8-6\sqrt{2}$;

б) $y=\sin(4x-1)$ Ответ: $4\cos(4x-1)$;

в) $y=\dfrac{1}{\cos 2x}$ Ответ: $\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$;

г) $y=\mathrm{tg}^2\sqrt{x}$ Ответ: $\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cos\sqrt[3]{x}}$.

Вариант II

а) $y=3\cos^2 2x$, вычислить $y'\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$ Ответ: $-12\cos 2x\sin x$; $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$;

б) $y=4\mathrm{tg}3x$, вычислить $y'\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ Ответ: $\dfrac{12}{\cos^2 3x}$; 12;

в) $y=\sin x+0{,}5\sin 2x$ Ответ: $\cos x+\cos 2x$;

г) $y=\mathrm{tg}x\cdot\sin(2x+5)$ Ответ: $2\mathrm{tg}x\cos(2x+5)+\dfrac{\sin(2x+5)}{\cos^2 x}$.

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание

1. § 4 п. 12 – 17.
2. Подготовиться к контрольной работе, семинарскому занятию.

Домашняя контрольная работа

Вариант I

1. Найдите производную функции:

а) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+2x$; б) $\varphi(x)=\dfrac{2}{x^3}-x\sqrt{x}$;

в) $g(x) = 4\sin x$ и вычислите $g'\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$;

г) $h(x) = \frac{2-3x}{x+2}$ и вычислите $h'(-1)$.

2. Решите уравнение $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$, если $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$, $g(x) = \sqrt{x}$.

3. Необязательное задание.

Имеет ли производную функция $f(x) = -0{,}5x \cdot |x|$ в точке $x=0$?

Вариант II

1. Найдите производную функции:

а) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - x$; б) $\varphi(x) = \frac{4}{x^2} + x\sqrt[3]{x}$;

в) $g(x) = 3\cos x$ и вычислите $g'\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$;

г) $h(x) = \frac{3+2x}{x-2}$ и вычислите $h'(1)$.

2. Решите уравнение $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$, если $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 18x$, $g(x) = 2\sqrt{x}$.

3. Необязательное задание.

Имеет ли производную функция $f(x) = 2x \cdot |x|$ в точке $x=0$?

Вариант III

1. Найдите производную функции:

а) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 2x$; б) $\varphi(x) = \frac{2}{x^2} - \sqrt[4]{x^3}$;

в) $g(x) = 4\mathrm{ctg}x$ и вычислите $g'\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$;

г) $h(x) = \frac{3x+4}{x-3}$ и вычислите $h'(4)$.

2. Решите уравнение $f'(x) \cdot g'(x) = 0$, если $f(x) = x^3 - 3x^2$, $g(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x}$.

3. Необязательное задание.

Дана функция $f(x) = x^2 - 2$, где $x \geq 0$. Найдите функцию $g(x)$ такую, чтобы выполнялось условие $g(f(x)) = x$.

УРОК № 4

Обобщающий урок по теме «Производная».

Урок –семинар.

Цели: выяснить степень готовности учащихся к контрольной работе; обобщить знания по теме.

Ход урока

I. Программированный контроль (10 мин.)

Задание		Варианты ответов			
Вариант I	*Вариант II*	1	2	3	4
$f(x)=(1+2x)(2x-1)$ Найдите $f'(-2)$	$f(x)=(3-2x)(2x+3)$ Найдите $f'(-2)$	–16	17	16	–17
$\varphi(x)=7+x\sqrt[3]{x}$ Найдите $\varphi'(8)$	$\varphi(x)=3+\frac{x}{\sqrt{x}}$ Найдите $\varphi'(4)$	$\frac{1}{4}$	$2\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	1
$g(x)=4\sin x$ Найдите $g'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	$g(x)=2\cos x$ Найдите $g'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	–2	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	2
$h(x)=\frac{2+x^2}{x}$ Найдите $h'(-1)$	$h(x)=\frac{1-2x^2}{x}$ Найдите $h'(-1)$	3	1	–1	–3

Верный ответ: вариант I – 1, 2, 4, 3; вариант II – 3, 1, 2, 4.

Устная или письменная работа по устранению ошибок учащихся.

II. Дифференцированный опрос нескольких учащихся по вопросам теории

1. Запишите правило дифференцирования сложной функции.
Докажите его. (Сильный учащийся.)
2. Запишите правила дифференцирования тригонометрических функций. (Слабый учащийся.)

3. Докажите формулу дифференцирования косинуса. (По желанию.)
4. Докажите формулу дифференцирования тангенса. (По желанию.)
5. Докажите формулу дифференцирования котангенса. (По желанию.)

III. Историческая справка о возникновении и развитии понятия производной, о вкладе Ньютона, Лейбница в этот вопрос (сообщения учащихся).

IV. Разбор на доске подходов к решению примеров по всей теме, проверяется готовность учащихся к выполнению контрольной работы в целом.

1. Решите неравенства:

а) $h'(x) > 0$, если $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$;

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

б) $f'(x) < 0$, если $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$

Ответ: $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

2. Найти производную функции

а) $f(x) = \sqrt{x-3}(x+2)$ и вычислить $f'(4)$

Ответ: $f'(x) = \frac{3x-4}{2\sqrt{x-3}}$; $f'(4) = 4$.

б) $\varphi(x) = 4\cos 5x$ и вычислите $\varphi'\left(-\frac{\pi}{16}\right)$

Ответ: $\varphi' = -20\sin 5x$; $\varphi'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 10$.

Задания для интересующихся математикой могут быть такими:

а*) $\frac{f'(x)}{g'(x)} \geq 0$, если $f(x) = x^3 - 3x$, $g(x) = x^2 + 6x$

Ответ: $[3; -1] \cup [1; +\infty)$.

б*) $h'(x) < 0$, если $h(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - x^2 + 6x + 1997$

V. Итоги урока

VI. Домашнее задание

1. § 4 п. 12 – 17; стр 166 № 3(1; 3).
2. Подготовиться к контрольной работе.
3*. Найти производную функции:

а) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x^5}} + x^{101}$. Ответ: $-\frac{1}{4x\sqrt{x}} + \frac{5}{2\sqrt{x^7}} + 101x^{100}$;

б) $g(x)=\left(3x-x^2\right)\sqrt{x^3}$. Ответ: $7{,}5x\sqrt{x}-3{,}5x^2\sqrt{x}$;

в) $h(x)=\frac{1}{2}\cos^4\left(2x^2-3\right)$. Ответ: $-4x\sin\left(4x^2-6\right)\cos^2\left(2x^2-3\right)$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Цель: проверить знания и умения по данной теме.

Ход урока

I. Организация учащихся на выполнение контрольной работы

II. Выполнение работы

Вариант I

1. Найдите производную данной функции:

а) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-x^3+4$; б) $g(x)=3x-\frac{1}{x^3}$;

в) $\varphi(x)=\frac{1}{2}\cos x$.

2. Найдите производную функции f и вычислите её значение в указанной точке:

а) $f(x)=x\sin x,\ x=\frac{\pi}{2}$; б) $f(x)=(2x-3)^6,\ x=1$.

3. Найдите точки, в которых производная данной функции равна нулю:

а) $f(x)=2\sin x-\sqrt{3}x$; б) $f(x)=x^5+20x^2$.

Вариант II

1. Найдите производную данной функции:

а) $f(x)=-2x^4+\frac{1}{3}x^6-1$; б) $g(x)=\frac{2}{x^4}+x$;

в) $\varphi(x)=3\sin x$.

2. Найдите производную функции f и вычислите её значение в указанной точке:

а) $f(x)=\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right),\ x=\frac{\pi}{4}$; б) $f(x)=\frac{x^2-2}{x},\ x=-1$.

3. Найдите точки, в которых производная данной функции равна нулю:

а) $f(x)=\sqrt{2}\cos x+x$; б) $f(x)=x^4-2x^2$.

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание: повторить § 4, п. 14; лемма из п. 15.

§ 5. ПРИМЕНЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ПРОИЗВОДНОЙ (12 Ч)

ПРИМЕНЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ (3 Ч)

УРОК № 1

Цели: ввести понятие непрерывной функции на промежутке, рассмотреть её свойство знакопостоянства. Рассмотреть примеры функций, не являющихся непрерывными, а также примеры непрерывных, но не дифференцируемых в данной точке.

Ход урока

I. Итоги контрольной работы. Анализ ошибок

II. Объяснение нового материала

1. Какая функция называется непрерывной в точке ?
2. Приведите примеры непрерывных функций в точке и которые не будут таковыми, проиллюстрировав рисунками на доске.
3. Вводится понятие функции, непрерывной на промежутке.
4. Вспомним лемму из § 4 п. 15.
5. Ставится задача: будет ли непрерывной любая дифференцируемая функция ?
6. Предлагается для самостоятельного рассмотрения § 5, п. 18, примеры 3 и 4 с последующим обсуждением.
7. Рассматривается свойство непрерывных функций.

III. Закрепление

№ 241(а; в) Ответ: а) да; в) в точке $x_1 = 0$ нет, в точке $x_2 = -1$ да.

№ 242(в; г) Ответ: в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(-\infty; 2)$ и $(2; +\infty)$.

№ 247(б; в; г) Ответ: б) $[0; +\infty)$; в) m=2; г) $(-\infty; 0]$.

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание

1. Из § 5 п. 18 примеры 1, 3, 4; № 241(б; г), № 242(а; б), №247(а).
2. Привести свои примеры функций непрерывных, но не дифференцируемых в данной точке.

УРОК № 2

Цель: рассмотреть решение неравенств методом интервалов.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания

1. Рассмотреть примеры функций, которые являются непрерывными, но не дифференцируемыми в данной точке.
2. Какими свойствами обладает непрерывная функция ?

II. Объяснение нового материала

III. Закрепление

№ 244(а; г) Ответ: а) $(-\infty; 1), (4; +\infty)$; г) $(-\infty; 1)$.

№ 245(а; б; в) Ответ: а) $(-\infty; 3), (1; 2], [4; +\infty)$; б) $(-\infty; 0), (2; 4), (6; +\infty)$.

№ 246(в; г) Ответ: в) $(-4; -3) \cup (0; +\infty)$.

№ 248(б; г) Ответ: б) $(-\infty; -\sqrt{8}], [\sqrt{8}; +\infty)$.

№ 249(б) Ответ: б) $(-\infty; -2) \cup (2; 3)$.

IV. Учащиеся самостоятельно рассматривают по учебнику § 5, п. 18(2), из метода интервалов пример 2

V. Решение упражнений № 243(в)

VI. Итоги урока

VII. Домашнее задание

1. § 5 п. 18; № 244(б), № 245(г), № 246(б), № 248(а), № 249(в), № 243(б; в).
2. Подготовиться к самостоятельной работе.

УРОК № 3

Цель: проверить умение применять метод интервалов для решения неравенств.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания

1. Рассказать план решения неравенства методом интервалов.
2. Консультанты проверяют домашнее задание.

II. Работа группами

Решить неравенства:

Группа I

а) $(x-2)^3(x+1)(x-1)^2(x^2+2x+5)<0$ Ответ: $(-1;1)$, $(1;2)$;

б) $\dfrac{(x-3)^2(x-2)x}{(x+1)^4(x+5)}>0$ Ответ: $(-5;-1)$, $(-1;0)$, $(2;3)$, $(3;+\infty)$;

в) $\sqrt{x}(x+2)>0$ Ответ: $(0;+\infty)$.

Группа II

а) $(x^2+1)(x^2+x+1)(x+5)^3>0$ Ответ: $(-5;+\infty)$;

б) $\dfrac{7x-12-x^2}{2x^2-x-3}<0$ Ответ: $(-\infty;-1)$, $\left(\dfrac{3}{2};3\right)$, $(4;+\infty)$;

в) $\sqrt{x}(x-2)<0$ Ответ: $(0;2)$.

Группа III

а) $(x+4)^2(x+5)^2(x-6)(x+3)\le 0$ Ответ: $[-3;6]$, $x=-5$, $x=-4$;

б) $\dfrac{2x^2-4x-6}{4x-11}\ge 2$ Ответ: $[2;2{,}75)$, $[4;+\infty)$;

в) $\sqrt{x}(x-2)\ge 0$ Ответ: $[2;+\infty)$, $x=0$.

Со слабыми учащимися работа на доске № 244(в), № 246(а), № 248(в).

III. Решение примера в) III-ей группой с классом.

IV. Самостоятельная работа

Решить неравенства:

Вариант I

а) $\dfrac{x^2(x-3)}{x-1}<0$ Ответ: $(1;3)$;

б) $(x+2)\sqrt{x^2-1}>0$ Ответ: $(-2;-1)$, $(1;+\infty)$;

в) $x^2-3x+2>0$ Ответ: $(-\infty;1)$, $(2;+\infty)$

Вариант II

а) $\dfrac{x^2(x+2)}{x+1}<0$ Ответ: $(-2;-1)$;

б) $(x-3)\sqrt{x^2-1}<0$ Ответ: $(-\infty;-1)$, $(1;3)$;

в) $x^2+5x+4<0$ Ответ: $(-4;-1)$.

Вариант III

а) $\frac{x^4-3x^2+2}{6x^2-x-1}\le 0$ Ответ: $[-\sqrt{2};-1]$, $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$, $\left(1;\sqrt{2}\right)$;

б) $\left(x^2-16\right)\sqrt{x+3}\le 0$ Ответ: $[-3;4]$, $x=-4$;

в) $(x+3)(x+2)x(x-1)>0$ Ответ: $(-\infty;-3)$, $(-2;0)$, $(1;+\infty)$.

V. Итоги урока

VI. Домашнее задание

1. Из § 5 п. 18; № 250, № 249(а; г).

2*. Решить неравенства:

а) $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x-3}>\frac{3}{x-4}$ Ответ: $(2;2{,}5)$, $(3;4)$;

б) $\left|\frac{x+2}{x-3}\right|>2$ Ответ: $\left(\frac{4}{3};3\right)$, $(3;8)$.

3. Повторить из § 4 п. 13.

КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ (3 Ч)

УРОК № 1

Цели: ввести определение касательной и сформулировать, в чём состоит геометрический смысл производной.

Ход урока

I. Итоги самостоятельной работы и анализ ошибок

II. Изучение нового материала

1. Учащиеся самостоятельно разбирают из § 5 п. 19 раздел «Касательная».
2. Фронтальная беседа по этому материалу.
3. Устно рассмотреть № 251 и № 252.

III. Решение упражнений

№ 253(в), № 254(г), № 257(в), № 258(б; в).

Указание: опираясь на геометрический смысл производной, имеем, что угловой коэффициент касательной равен значению производной данной функции в точке x_0, где x_0 - абсцисса точки касания ($k=f'(x_0)$). Но $k=\operatorname{tg}\alpha$, поэтому $\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)$.

№ 259(г)
В задании нужно найти угол, образованный прямыми OX и касательной к графику функции в точке, абсцисса которой является абсциссой точки пересечения графика функции и оси.
№ 260 Указание: найти, под каким углом пересекается касательная в соответствующей точке с осью OX, а затем найти угол между касательной и осью OY.

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание: из § 5 п. 19(1); № 253(б), № 254(б), № 257(г), № 258(а; г), № 259(в), № 260.

УРОК № 2

Цели: вывести уравнение касательной к графику функции и научить находить его для конкретных функций. Рассмотреть формулу Лагранжа.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания
1. Какая прямая называется касательной ?
2. В чём состоит геометрический смысл производной ?
3. Если $f'(x) < 0$, то какой угол образует касательная с положительным направлением оси OX ? А если $f'(x) > 0$ или $f'(x) = 0$?

II. Объяснение нового материала
1. Вывод уравнения касательной к графику функции.
2. Вывод формулы Лагранжа.

III. Решение упражнений
1. № 255(а; б), № 256(а; б).
2. На параболе $y = x^2 - 2x - 8$ найти точку M, в которой касательная к ней параллельна прямой $4x + y + 4 = 0$.

Решение.
Определим угловой коэффициент касательной к параболе $y = x^2 - 2x - 8$:
$k = y' = 2x - 2$.
Угловой коэффициент прямой $4x + y + 4 = 0$; $y = -4x - 4$, $k = -4$.
Касательная к параболе и данная прямая по условию параллельны. Следовательно, их угловые коэффициенты равны, т.е $2x - 2 = -4$, откуда $x = -1$

(абсцисса точки касания). Ординату точки касания М вычислим из уравнения данной параболы $y = x^2 - 2x - 8$, т.е.

$y(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 8 = -5$, М(−1; −5).

3. Найти угол между прямой $x = 3$ и параболой $y = x^2$.

Решение.

Углом между прямой и кривой называется угол между этой прямой и касательной к кривой в точке их пересечения. Искомый угол $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

$y' = \left(x^2\right)' = 2x$. Так как $\operatorname{tg}\alpha = y'(3) = 2 \cdot 3 = 6$, то $\alpha = \operatorname{arctg}6$, $\varphi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}6$.

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание

1. § 5 п. 19; № 255(в; г), № 256(в; г).

2*. Дана кривая $y = -x^2 + 1$. Найти точку пересечения её графика, в которой касательная параллельна прямой $y = 2x + 3$. Ответ: (−1; 0).

УРОК № 3

Цели: рассмотреть более сложные примеры по теме и проверить навыки и умения при самостоятельном решении упражнений.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания

1. Записать уравнение касательной и формулу Лагранжа.
2. Ответить на вопросы по решению упражнений.

II. Решение упражнений

1. Найти координаты точки, в которой касательная к параболе $y = x^2 - x - 12$ образует с осью OX угол 45^0.

Решение.

$\operatorname{tg}\alpha = y' = \left(x^2 - x - 12\right)' = 2x - 1;$

$\alpha = 45^0$, $\operatorname{tg}45^0 = 2x - 1$; $1 = 2x - 1$; $x = 1$.

Определим ординату искомой точки: $y(1) = 1 - 1 - 12 = -12$, М(1; −12).

2. В какой точке кривой $y = \sqrt[3]{x}$ касательная наклонена к оси абсцисс под

углом 60^0 ?

Решение.

$y'(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$. Т.к. $y'(x)=k=\text{tg}60^0$, то $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\sqrt{3}$; $x^{-\frac{2}{3}}=3\sqrt{3}$;

$x^{-\frac{2}{3}}=3^{\frac{3}{2}}$, т.е. $x=\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{3}{2}}=3^{-\frac{9}{4}}$.

Найдём ординату точки касания: $y=\left(3^{-\frac{9}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=3^{-\frac{3}{4}}$.

Ответ: $K\left(3^{-\frac{9}{4}};\,3^{-\frac{3}{4}}\right)$.

3. Найти, под каким углом ось OX пересекает параболу $y=x^2+x$.

Решение.

а) Точки пересечения параболы с осью OX: A(–1; 0), B(0; 0);

б) Угловые коэффициенты касательных к параболе $y=x^2+x$ в точках A и B: $k_1=-1$; $k_2=1$;

в) Углы, образованные касательными в точках пересечения параболы с осью OX: $\text{tg}\alpha_1=-1$, $\alpha_1=135^0$; $\text{tg}\alpha_2=1$, $\alpha_2=45^0$.

4. В какой точке прямая, проходящая через точку (2; –1), может касаться параболы $y=x^2-4$?

Решение.

Обозначим неизвестную точку касания через $\left(x_0;x_0{}^2-4\right)$ и, найдя производную данной функции $y'=2x$, запишем уравнение касательной

$y=\left(x_0{}^2-4\right)+2x_0\left(x-x_0\right)$.

Для нахождения x_0 запишем условие принадлежности точки (2; –1) касательной. Получим уравнение относительно x_0:

$-1=x_0{}^2-4+2x_0\left(2-x_0\right)$, получим $x_0=1$ или $x_0=3$.

Получаем две касательные: $y=2x-5$ и $y=6x-13$.

III. Самостоятельная работа

Вариант I

Напишите уравнение касательной к

а) гиперболе $y = -\frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x = -1$.

Ответ: $y=x+2$;

б) графику функции $y = \cos\frac{x}{3}$ в точке с абсциссой $x=\pi$.

Ответ: $y = -\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + \frac{1}{2}$.

Вариант II

Напишите уравнение касательной к

а) графику функции $y = x^2 - 4$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

Ответ: $y = -4x - 8$;

б) графику функции $y = \sin 2x$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{6}$.

Ответ: $y = x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$.

Вариант III

Напишите уравнение касательной к

а) графику функции $y = \sin\frac{x}{2}$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $y = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$;

б) к параболе $y = x^2 - 2x$ в её точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Ответ: $y = 2x - 4$.

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание

1. Из § 5 п. 19; стр. 167, № 5; принести микрокалькуляторы.

2*. Найдите уравнение такой касательной к графику $y = x^3 + 2x$, для которой существует параллельная касательная к графику $y = \sin 2x$.

Ответ: $y = 2x$.

ПРИБЛИЖЁННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ (2 Ч)

УРОК № 1

Цели: ввести общую формулу для нахождения приближённого значения дифференцируемой в точке x_0 функции $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ и рассмотреть частные случаи данной формулы.

Ход урока

I. Итоги самостоятельной работы и анализ ошибок

II. Объяснение нового материала

1. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке $O(0; 0)$.
2. Назовите уравнение касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.
3. Сравните значения функций $f(x) = \sin x$ и $y = x$ вблизи точки $x_0 = 0$. Каким свойством обладает касательная к графику функции $f(x) = \sin x$ в точке $x_0 = 0$?
4. Записать как обобщение результатов решения общую формулу для нахождения приближенного значения дифференцируемой в точке x_0 функции $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.
5. После этого рассмотреть частные случаи данной формулы и ввести формулы для вычисления квадратных корней вида $\sqrt{1+\Delta x}$ и значений вида $(1+\Delta x)^n$.

III. Решение упражнений

№ 261(а; б), № 262(а; б), № 266(а; б).

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание: из § 5 п. 20; № 261(в; г), № 262(в; г), № 266(в; г).

УРОК № 2

Цели: закрепить навыки и умения приближённых вычислений при решении упражнений; познакомить с формулами:

$$\sqrt[k]{x_0+\Delta x}\approx\sqrt[k]{x_0}+\frac{\sqrt[k]{x_0}}{kx_0}\cdot\Delta x\text{, при } x_0\neq 0 \text{ и } (x+\Delta x)^k\approx x^k+kx^{k-1}\Delta x.$$

Ход урока

I. Проверка домашнего задания

1. Записать формулы приближённых вычислений на доске.
2. Консультанты проверяют домашнее задание.

II. Решение упражнений

№ 263(а; в), № 264(б; г) № 265(б; г).

III. Познакомить с формулами

$$\sqrt[k]{x_0+\Delta x}\approx\sqrt[k]{x_0}+\frac{\sqrt[k]{x_0}}{kx_0}\cdot\Delta x\text{, при } x_0\neq 0\text{, где } \frac{\sqrt[k]{x_0}}{kx_0}=f'(x_0); \qquad (1)$$

$$(x+\Delta x)^k\approx x^k+kx^{k-1}\Delta x. \qquad (2)$$

IV. Вычислить приближённо значение

1. $\sqrt[3]{26{,}19}$.

Решение.

Здесь $y=\sqrt[3]{x}$, а $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Полагая $x_0=27$, $\Delta x=-0{,}81$ и используя формулу (1), получим $\sqrt[3]{26{,}19}=\sqrt[3]{27-0{,}81}\approx\sqrt[3]{27}-\frac{0{,}81}{3\sqrt[3]{27^2}}=3-\frac{0{,}81}{3\cdot 9}=2{,}97.$

2. $\sqrt[5]{33}$.

Решение.

Здесь $y=\sqrt[5]{x}$, а $y'=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$, следовательно,

$$\sqrt[5]{33}=\sqrt[5]{32+1}=\sqrt[5]{2^5+1}\approx 2+\frac{2}{5\cdot 32}=2+0{,}0125\approx 2{,}013.$$

3. $2{,}998^{200}$.

Решение.

Используя формулу (2), получим:

$$2{,}998^{200} = (3-0{,}002)^{200} \approx 3^{200}\left(1+200\cdot 3^{-1}\cdot(-0{,}002)\right) =$$

$$= 3^{200}\left(1-\frac{200}{3}\cdot\frac{2}{1000}\right) = 3^{200}\cdot\left(1-\frac{2}{15}\right) = 3^{200}\cdot\frac{13}{15}.$$

V. Итоги урока

VI. Домашнее задание

1. Из § 5 п. 20, повторить из § 4 п. 13(2); № 263(б; г), № 264(а; в), № 265(а; в).

2*. Вычислить приближённо значение: а) $2{,}997^{50}$; б) $\frac{1}{\sqrt{1{,}04}}$; в) $\sqrt[3]{8{,}012}$.

Ответы: а) $3^{50}\cdot 0{,}95$; б) 0,98; в) 2,001.

ПРОИЗВОДНАЯ В ФИЗИКЕ И ТЕХНИКЕ (3 Ч)

УРОК № 1

Цель: дать понятие о возможностях применения элементов дифференциального исчисления в описании и изучении процессов и явлений реального мира.

Ход урока

I. Объяснение нового материала

1. С привлечением учащихся решить задачу на отыскание мгновенной скорости движения, если задан его закон; зафиксировать, в чём состоит механический смысл производной.

2. После этого поставить перед учащимися задачу определить скорость и ускорение движения, если зависимость координаты точки, движущейся по прямой, от времени выражается формулой $x(t) = \frac{a}{2}t^2 + V_0 t + x_0$ (пример 2).

3. Обсудив общий план решения, предложить учащимся сначала найти скорость, а затем ускорение движения; фронтально выполнить проверку полученных результатов.

4. Рассмотреть механическую интерпретацию формулы Лагранжа и получить с помощью механического смысла производной формулу: $(f+h)' = f' + h'$ (примеры 3 и 4).

II. Решение упражнений № 267, № 270, № 272, № 275.

Решение.

а) $V(t) = x'(t) = \left(-\frac{t^3}{6} + 3t^2 - 5\right)' = -\frac{t^2}{2} + 6t;$

$a(t) = V'(t) = \left(-\frac{t^2}{2} + 6t\right)' = -t + 6; \quad a(t) = 0$, если $-t + 6 = 0, \ t = 6$ с.

б) $V(6) = -\frac{6^2}{2} + 6 \cdot 6 = 18$, т.е V=18 м/с.

№ 275.

Решение.

а) $F = m \cdot a, \quad V(t) = x'(t), \quad a(t) = V'(t), \quad E = \frac{mV^2}{2};$

б) $V(t) = \left(t^2 + t + 1\right)' = 2t + 1; \quad a(t) = (2t + 1)' = 2; \quad a = 0{,}02 \text{ м}/c^2.$

$F = m \cdot a = 2 \cdot 0{,}02 = 0{,}04, \quad F = 0{,}04\text{Н}, \quad E = 0{,}0025\text{Дж}.$

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание

1. Из § 5 п. 21(1); № 268, № 269, № 274.
2. Подготовиться к уроку-семинару по этой теме. Для этого прочитать из § 5 п. 21(2) и самим найти примеры применения производной в физике, технике и других отраслях.
3. Дать задание троим учащимся подготовиться по примерам применения производной из учебника. К примеру 5 прибавить решение задачи № 276.

УРОК № 2

Цель: показать широкий спектр приложений производной.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания

1. Заслушать сообщения учащихся по примерам применения производных из учебника.
2. Рассмотреть примеры применения производной в физике, технике и других отраслях, предложенные учащимися.

II. Решение упражнений

1. При равномерном протекании заряда по проводнику силой тока называется заряд, протекающий за единицу времени. Дайте определение силы тока в общем случае.

2. Количество электричества, протекающее через проводник, начиная с момента t=0, задаётся формулой $q = 3t^2 + t + 2$. Найдите силу тока в момент времени $t = 3$.

3. Пусть Q(t) – количество теплоты, которое необходимо для нагревания 1 кг воды от 0^0 до T^0 (по Цельсию). Известно, что в диапазоне $0 \le T \le 95$ формула $Q(t) = 0{,}396T + 2{,}081 \cdot 10^{-3}T^2 - 5{,}024 \cdot 10^{-7}T^3$ даёт хорошее приближение к истинному значению Q(t). Найдите, как зависит теплоёмкость воды от температуры.

№ 277.

а) $x_1(t) = 4t^2 - 3, \quad V_1(t) = \left(4t^2 - 3\right)' = 8t$;

б) $x_2(t) = t^3, \quad V_2(t) = x_2'(t) = \left(t^3\right)' = 3t^2$;

в) определим, для каких t скорость первой точки больше скорости второй точки:

$V_1(t) > V_2(t)$, если $8t > 3t^2$, $3t^2 - 8t < 0$, $3t\left(t - 2\frac{2}{3}\right) < 0$, $0 < t < 2\frac{2}{3}$.

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание

1. Из § 5 п. 21; № 271, № 273 и наиболее удачные задачи, приготовленные к уроку учащимися.
2. Подготовиться к самостоятельной работе.

УРОК № 3

Цели: проверить степень усвоения механического смысла производной и навык решения задач; продолжить показывать приложения производной.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания

1. В чём состоит механический смысл производной ?
2. Тело движется по прямой согласно закону $x(t)$. Запишите формулы для нахождения скорости и ускорения тела в момент времени t.

3. Найдите скорость и ускорение точки в момент времени $t = 1$, если:

а) $x(t) = t^3 - 2t^2 + 5$ Ответ: $V(t) = -1,\ a(t) = 2;$

б) $x(t) = 5t - t^2 = -1$ Ответ: $V(t) = 3,\ a(t) = -2;$

в) $x(t) = 3\cos 2t,\ t_0 = \frac{\pi}{3}$ Ответ: $V(t) = -3\sqrt{3},\ a(t) = 6;$

г) $x(t) = -2t^2 + t - 4$ Ответ: $V(t) = 5,\ a(t) = 4.$

II. Решение задач

1. № 278 (часы перевести в секунды).

2. Радиус круга R изменяется по закону $R = 4 + 2t^2$. Определите, с какой скоростью изменится его площадь в момент t=2 с. Радиус круга измеряется в сантиметрах. Ответ: 603 см^2/с.

3. Основание параллелограмма a изменяется по закону $a = 2 + 5t$, а высота b по закону $b = 2 + 6t$. Вычислите скорость изменения его площади в момент t=3 с. Основание a и высота b измеряются в сантиметрах.
Ответ: 202 см^2/с.

4. Если бы процесс радиоактивного распада протекал равномерно, то под скоростью распада следовало бы понимать количество вещества, распавшегося в единицу времени. На самом деле процесс неравномерен. Дайте определение скорости радиоактивного распада.

III. Самостоятельная работа

Вариант I

1. Материальная точка массой 4 кг движется прямолинейно по закону $S(t) = 4t + t^2 - \frac{1}{6}t^3$, где S – путь в метрах, t –время в секундах. Найдите силу, действующую на точку в момент t=2 с. Ответ: 0.

2. Тело, выпущенное вертикально вверх с высоты h_0 с начальной скоростью V_0, движется по закону $h(t) = h_0 + V_0 t - \frac{gt^2}{2}$, где h – высота в метрах, t – время в секундах. Найдите высоту тела в момент времени, когда скорость тела в 2 раза меньше первоначальной, если $h_0 = 4$ м, $V_0 = 3$ м/с, $g = 10$ м/с^2. Ответ: 4,3375 м.

Вариант II

1. Материальная точка массой 5 кг движется прямолинейно по закону $S(t) = 2t + \sqrt{t}$, где S – путь в метрах, t – время в секундах. Найдите силу,

действующую на точку в момент $t = 4$ с. Ответ: $-\frac{5}{32}$ Н.

2. Маховик, задерживаемый тормозом, поворачивается за t с на угол $3t - 0{,}1t^2$ (рад). Найдите: а) угловую скорость вращения маховика в момент $t = 7$ с; б) в какой момент времени маховик остановится.

Ответ: а) $2{,}86\frac{р}{с}$; б) 150 с.

Вариант III

1. Материальная точка массой 4 кг движется прямолинейно по закону $S(t) = 3t - \frac{1}{t+2}$, где S – путь в метрах, t – время в секундах. Найдите силу, действующую на точку в момент $t = 1$ с.

2. Маховик, задерживаемый тормозом, поворачивается за $t = 1$ с на угол $2t - 0{,}04t^2$ (рад). Найдите: а) угловую скорость вращения маховика в момент $t = 12$ с; б) в какой момент времени маховик остановится.

IV. Итоги урока

V. Домашняя контрольная работа

Вариант I

1. Решите неравенство $\frac{x^2 - 9}{x - 5} < 0$ методом интервалов.

2. Точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 3t^3 + 2t + 1$. Найдите её ускорение в момент времени $t = 2$ с.

3. Найдите угол наклона касательной к графику функции $f(x) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{x}$ в точке его с абсциссой $x_0 = -1$.

4. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 2x$ в точке его с абсциссой $x_0 = 2$. Выполните рисунок к задаче.

5*. Начертите схематически график функции $f(x)$, которая определена на промежутке $[-4; 3]$, непрерывна в точке $x = -2$, но не дифференцируема в этой точке; $x = 1$ – точка минимума, и $f(1) = 2$.

Вариант II

1. Решите неравенство: $\frac{x^2 - 4}{x + 5} > 0$ методом интервалов.

2. Точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 2t^2 + 1$. Найдите её ско-

рость и ускорение в момент времени $t = 2$ с.

3. Найдите угол наклона касательной к графику функции $f(x) = 3 - \frac{4}{x}$ в точке его с абсциссой $x_0 = 2$.

4. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 1$ в точке его с абсциссой $x_0 = 2$. Выполните рисунок к задаче.

5*. Начертите схематически график функции $f(x)$, которая определена на промежутке $(-5; 4]$, непрерывна в точке $x = 2$, но не дифференцируема в этой точке; $x = -1$ –точка максимума, и $f(-1) = 3$.

Вариант III

1. Решите неравенство $\frac{2x^2 + x - 3}{x - 5} \le 0$ методом интервалов.

2. Точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 2t^3 + 3t + 1$. Найдите её ускорение в момент времени $t = 3$ с.

3. Найдите угол наклона касательной к графику функции $f(x) = 2 - \frac{\sqrt{3}}{x}$ в точке его с абсциссой $x_0 = 1$.

4. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 2x$ в точке его с абсциссой $x_0 = -2$. Выполните рисунок к задаче.

5*. Начертите схематически график функци $f(x)$, которая определена на промежутке $(-3; 4)$, непрерывна в точке $x = -2$, но не дифференцируема в этой точке; $x = 2$ –точка минимума, и $f(2) = 3$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Цель: выявление знаний, умений учащихся и степени усвоения ими материала.

Ход урока

I. Организация учащихся на выполнение контрольной работы

II. Выполнение работы

Вариант I

1. Решите неравенство : $\frac{49 - x^2}{5 - x} < 0$.

2. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведённой к графику данной функции через его точку с указанной абсциссой:

$$f(x) = 8x - x^4, \quad x_0 = -2.$$

3. Прямолинейное движение точки описывается законом $x(t) = 2t^3 - t^2$. Найдите скорость и ускорение в момент t=2.

4. Докажите, что касательные, проведённые к графику данной функции $f(x)$ в его точках с абсциссами x_1 и x_2, параллельны.

$$f(x) = 1 + \sin 2x, \quad x_1 = 0,\ x_2 = \pi.$$

Вариант II

1. Решите неравенство : $\dfrac{x+3}{x^2 - 36} \geq 0.$

2. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведённой к графику данной функции через его точку с указанной абсциссой:

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x, \quad x_0 = 2.$$

3. Прямолинейное движение точки описывается законом $x(t) = t^4 - 3t$. Найдите скорость и ускорение в момент t=1.

4. Докажите, что касательные, проведённые к графику данной функции $f(x)$ в его точках с абсциссами x_1 и x_2, параллельны.

$$f(x) = 2 - \cos\frac{1}{2}x, \quad x_1 = -\pi,\ x_2 = 3\pi.$$

III. Необязательные задания

Решите неравенство:

Вариант I $\quad x\left(x^2 + 4x + 4\right)\sqrt{x^2 - 1} \leq 0$

Вариант II $\quad x\left(x^2 - 2x + 1\right)\sqrt{25 - x^2} \geq 0$

IV. Домашнее задание: § 4, § 5 повторить, из § 2 п. 5.

§ 6. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ (12 Ч)

ПРИЗНАК ВОЗРАСТАНИЯ (УБЫВАНИЯ) ФУНКЦИИ (2 Ч)

УРОК № 1

Цели: доказать достаточный признак возрастания (убывания) функции и показать его применение при нахождении промежутков возрастания (убывания) функции.

Ход урока

I. Анализ контрольной работы

Выполнить задания, вызвавшие затруднения у учащихся, и указать основные ошибки.

II. Изучение нового материала

1. Исследование нахождения промежутков возрастания и убывания функции легко провести с помощью производной.
2. Достаточный признак возрастания (убывания) функции.
(Повторить формулу Лагранжа и провести доказательство признаков.)
3. Разобрать по учебнику пример 1 (рис. 101) и замечания 1 и 2.
4. Рассмотреть по учебнику решение примера 2 (рис. 102) и примера 3.

III. Закрепление изученного материала

1. Решить № 279(а; б; в).

Решение.

а) $\begin{matrix} f(x) = 3 - \frac{1}{2}x; \\ D(f) = R. \end{matrix}$ $f'(x) = -\frac{1}{2} < 0$ для любого x, поэтому $f(x)$ убывает на всей числовой прямой;

б) $\begin{matrix} f(x) = 4x - 5; \\ D(f) = R. \end{matrix}$ $f'(x) = 4 > 0$ для любого x, поэтому $f(x)$ возрастает на $(-\infty; +\infty)$.

в) $\begin{matrix} f(x) = -x^2 + 2x - 3; \\ D(f) = R. \end{matrix}$ $f'(x) = -2x + 2 = -2(x - 1)$.

$f'(x) > 0$, если $-2(x-1) > 0$, $x < 1$; $f'(x) < 0$, если $-2(x-1) < 0$, $x > 1$.

Функция возрастает на $(-\infty; 1]$; убывает на $[1; +\infty)$.

2. Решить № 280(в; г).

Решение.

в) $f(x) = \frac{x-3}{x}$; $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

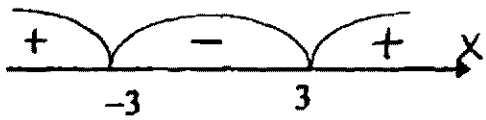
$$f'(x) = \left(\frac{x-3}{x}\right)' = \frac{(x-3)' \cdot x - (x-3) \cdot x'}{x^2} = \frac{x - x + 3}{x^2} = \frac{3}{x^2} > 0 \text{ при } x \neq 0.$$

Функция возрастает на $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

г) $f(x) = x^3 - 27x$; $D(f) = R$;

$$f' = (x^3 - 27x)' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x-3)(x+3).$$

$f'(x) > 0$, если $3(x-3)(x+3) > 0$. Решаем это неравенство методом интервалов:



$f'(x) > 0$ на $(-\infty; -3)$ и $(3; +\infty)$.

$f'(x) < 0$, если $3(x-3)(x+3) < 0$; $f'(x) < 0$ на $(-3; 3)$.

Ответ: функция f возрастает на $(-\infty; -3]$ и $[3; +\infty)$; убывает на $[-3; 3]$.

3. Решить № 282(а; б).

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание: из § 6 п. 22; решить № 280(а, б), № 281, № 82(в; г).

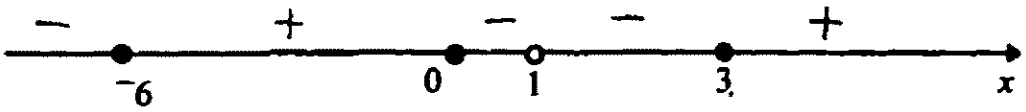
УРОК № 2

Цели: закрепить изученный материал по нахождению промежутков монотонности функции; проверить усвоение учащимися материала.

Ход урока

I. Устная работа

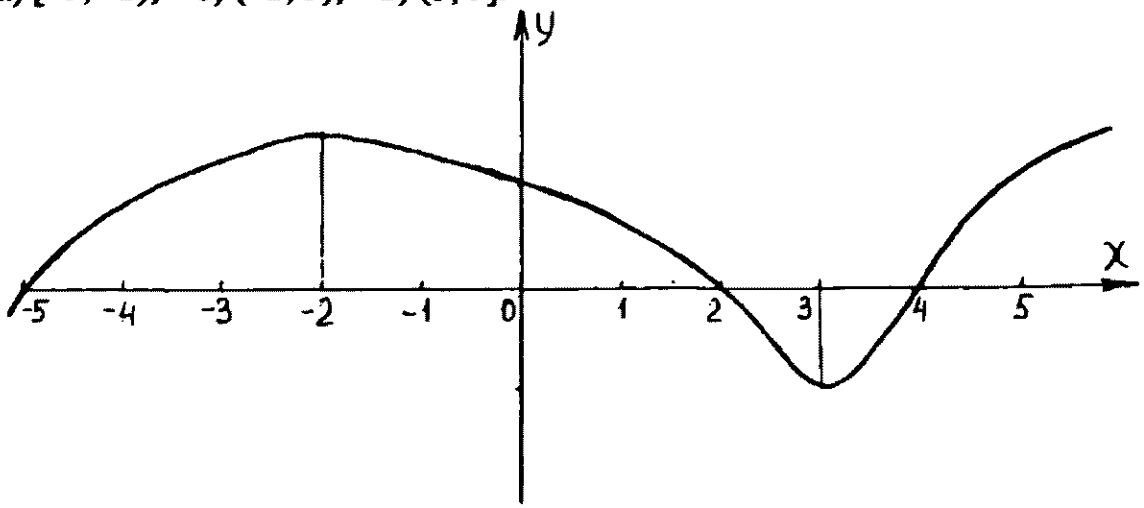
1. Сформулировать достаточный признак возрастания (убывания) функции.
2. Знак производной $f'(x)$ меняется по схеме, изображённой на рисунке:



Определите, на каких промежутках функция возрастает и на каких убывает.

3. На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = h(x)$. Определите знак производной функции на промежутках:

а) $[-5; -2)$; б) $(-2; 3)$; в) $(3; 5]$.



Ответ: а) плюс; б) минус; в) плюс.

4. Какие из данных функций возрастают, а какие убывают на всей числовой прямой:

а) $y = 2x + \cos x$; б) $y = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 4x - 7$; в) $y = -6x + 9$; г) $y = 2x^3$?

Ответ: а) возрастающая; б) возрастающая; в) убывающая; г) возрастающая.

II. Выполнение упражнений

1. Исследовать на монотонность функцию $y = x^5 + x^3 + 1$.

Решение.

D(y) = R; $y' = 5x^4 + 3x^2$. Справедливо неравенство $5x^4 + 3x^2 \geq 0$, причём знак равенства имеет место лишь в одной точке x=0. Значит, $y' > 0$ и функция $y = x^5 + x^3 + 1$ возрастает на всей числовой прямой.

2. Исследовать на монотонность функцию $y = 2\sin x - 3x$.

Решение.

D(y) = R. Имеем $y' = 2\cos x - 3$. Т.к. $|\cos x| \leq 1$, то $2\cos x - 3 < 0$ при всех x. Значит, $y' < 0$. Функция $y = 2\sin x - 3x$ убывает на всей числовой прямой.

3. Решить № 283 (а; б).

III. Самостоятельная работа (10 – 15 минут)

Вариант I	*Вариант II*
1. Изобразите схематически график функции и , пользуясь этим графиком, найдите промежутки возрастания и убывания функции:	
а) $f(x)=\frac{2}{x}$;	а) $f(x)=-\frac{4}{x}$;
б) $f(x)=2x^2-x$.	б) $f(x)=3x+x^2$.
2. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:	
а) $f(x)=x^2+3x+6$;	а) $f(x)=-x^2+4x-3$;
б) $g(x)=3x^3-x^2-7x$;	б) $g(x)=2x^3+3x^2-12x$;
в*) $h(x)=\sin 3x-4x$.	в*) $h(x)=\cos 2x+3x$.

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание: п. 22; решить № 283, № 285(б; в), № 282(в; г).

КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ ФУНКЦИИ, МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ (3 Ч)

УРОК № 1

Урок – лекция.

Цели урока: ввести понятие критических точек функции, точек экстремума; рассмотреть необходимое условие экстремума, признаки максимума и минимума функции.

Ход урока

I. Подведение итогов самостоятельной работы

Устранить пробелы в знаниях учащихся при решении задач, вызвавших затруднения у учащихся.

II. Объяснение нового материала

1. Определение критических точек функции (рис. 103 и рис. 104).
2. Теорема Ферма (необходимое условие экстремума). Рис. 105. Доказательство.
3. Рассмотреть примеры 1, 2 (рис. 106 и рис. 107).
4. Признак максимума функции, признак минимума функции (достаточное условие существования экстремума в точке). Доказательство.
5. Разобрать решение примера 3 (рис. 108).
6. Записать *правило исследования функции* $y = f(x)$ *на экстремум*:

а) найти область определения функции;

б) найти производную $f'(x)$;

в) найти точки, в которых выполняется равенство $f'(x) = 0$;

г) найти точки, в которых $f'(x)$ не существует;

д) отметить на координатной прямой все критические точки и область определения функции $y = f(x)$; получатся промежутки области определения функции, на каждом из которых производная функции $y = f(x)$ сохраняет постоянный знак;

е) определить знак y' на каждом из промежутков, полученных в п. (д);

ж) сделать выводы о наличии или отсутствии экстремума в каждой из критических точек в соответствии с достаточным условием экстремума.

7. Исследовать на экстремум функцию $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$.

Решение.

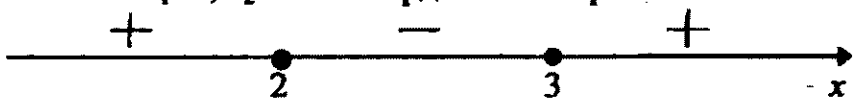
а) D(y)=R;

б) $y' = 6x^2 - 30x + 36$;

в) из уравнения $6x^2 - 30x + 36 = 0$ находим x_1=2, x_2=3;

г) y' существует при всех x;

д) отметим точки x_1=2, x_2=3 на координатной прямой:



е) $y' = 6(x-2)(x-3)$. Знаки производной на полученных промежутках отмечены на рисунке;

ж) при переходе через точку x=2 слева направо производная y' меняет знак с «+» на «–», значит, x=2 – точка максимума; при переходе через точку x=3

производная y меняет знак с «–» на «+», значит, x=3 – точка минимума.

В точке x=2 имеем $y_{max} = 29$; в точке x=3 имеем $y_{min} = 28$.

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание: из § 6 п. 23, п. 22; решить № 290 и № 291.

УРОК № 2

Цели: способствовать выработке навыка отыскания экстремумов функции, развитию логического мышления учащихся.

Ход урока

I. Опрос по изученному материалу

1. Двое учащихся отвечают у доски:

а) необходимое условие экстремума (доказать);

б) достаточное условие экстремума (доказать).

2. С остальными учащимися:

а) какую точку называют критической точкой функции ?

б) устно решить № 287 (по рис. 109);

в) устно решить № 289 (по рис. 110).

II. Выполнение упражнений

1. Исследовать на экстремум функцию $y = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x - 1}$.

Решение.

а)область определения : $x \neq 1$;

б) $y' = \dfrac{\left(x^2 - 6x + 9\right)' \cdot (x - 1) - \left(x^2 - 6x + 9\right) \cdot (x - 1)'}{(x - 1)^2} =$

$= \dfrac{(2x - 6)(x - 1) - (x - 3)^2 \cdot 1}{(x - 1)^2} = \dfrac{(x - 3) \cdot \left(2(x - 1) - (x - 3)\right)}{(x - 1)^2} = \dfrac{(x - 3)(x + 1)}{(x - 1)^2}$;

в) $y' = 0$ при $x = 3$ или $x = -1$;

г) y' не существует при $x = 1$, но эта точка не принадлежит области определения функции;

д) отметим на координатной прямой критические точки $x = -1$, $x = 3$ и точку $x = 1$;

е) найдём знаки производной на полученных промежутках:

ж) $x=-1$ – точка максимума, $y_{max}=-8$;

$x=3$ – точка минимума, $y_{min}=0$.

2. Исследуйте функцию на возрастание, убывание и экстремумы. Постройте график функции.

а) $y=x^3-3x^2$.

Решение.

D(y) = R, т.к. y –многочлен.

Имеем $y'=3x^2-6x=3x(x-2)$; $y'=0$, если $3x(x-2)=0$, $x=0$, $x=2$.

Определим промежутки знакопостоянства производной:

$y'>0$ при $x<0$, $x>2$; $y'<0$ при $0<x<2$.

Значит, x=0 – точка максимума,

x=2 – точка минимума.

Найдём экстремумы функции: $y_{max}=y(0)=0^3-3\cdot 0^2=0$;

$y_{min}=y(2)=2^3-3\cdot 2^2=-4$.

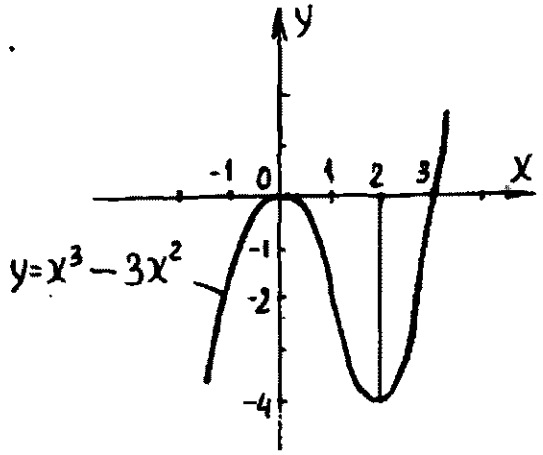
Найдём точки пересечения графика с осями координат:

С осью OX: $y=0$, $x^3-3x^2=0$, $x^2(x-3)=0$, $x=0, x=3$, т.е. имеем точки (0; 0) и (3; 0).

С осью OY: $x=0$, $y=0$, точка (0; 0).

Кроме того, функция $y=x^3-3x^2$ возрастает на (–∞; 0] и [2; +∞) и убывает на [0; 2].

Построим график функции $y=x^3-3x^2$.



б) решить № 295(а).
3. Решить № 294(а; в).

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание: п. 22 и п. 23; решить № 292 и № 295(г).

УРОК № 3

Цели: закрепить в ходе упражнений изученный материал и учить построению графиков функций.

Ход урока

I. Математический диктант (8–10 минут)

Вариант I	*Вариант II*
1. Опишите последовательность операций, которые нужно выполнить при отыскании	
промежутков возрастания (убывания) функции	экстремумов функции
2. Что Вы можете сказать о характере изменения функции, если	
$f'(x) > 0$ для всех x?	$f'(x) < 0$ для всех x?
3. Может ли значение функции в точке максимума быть меньше её значения в точке минимума ?	3. Может ли значение функции в точке минимума быть больше её значения в точке максимума ?
4. Объясните, почему функции не имеют точек экстремума:	
а) $y = \frac{1}{x}$; б) $y = \mathrm{tg}x$.	а) $y = -\frac{1}{x^3}$; б) $y = x^3 + x + 2$

Ответ: производная во всех точках области определения каждой функции имеет одинаковый знак.

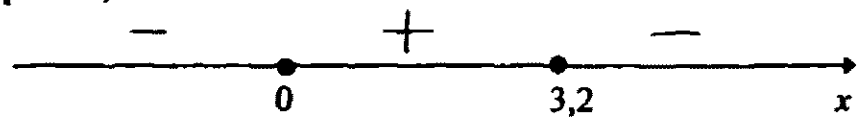
II. Решение упражнений
1. Решить № 293(а; в).
2. Исследовать функцию на возрастание, убывание и экстремумы. Построить график функции $y = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$.

Решение.

$$y = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2} = \frac{-x^2 + 10x - 16}{x^2}, \quad D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

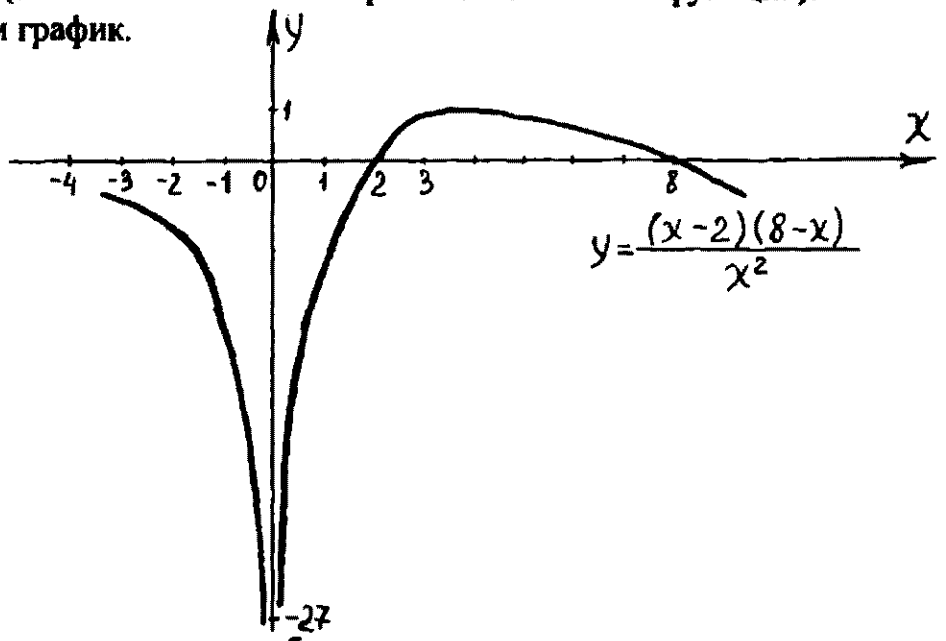
$$y' = \frac{(-2x+10)x^2 - (-x^2+10x-16)\cdot 2x}{x^4} = \frac{-10x^2+32x}{x^4}.$$

$y' = 0$ при x=3,2.



Функция убывает на промежутках (–∞; 0) и [3,2; +∞) и возрастает на (0; 3,2]. Точка x=3,2 – точка максимума. В точке x=0 функция не определена (эта точка не является критической точкой функции).

Строим график.



III. Самостоятельная работа

Вариант I	*Вариант II*
Исследуйте на максимум и минимум функцию:	
а) $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$;	а) $f(x) = x^4 - 8x^2$;
б) $g(x) = \frac{x}{4} + \frac{9}{x}$	б) $g(x) = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание

1. Повторить из § 2 п. 6 и п. 7.
2. Из § 6 п. 22 и п. 23; решить № 295(б; в), № 294(б; г).

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ (3 Ч)

УРОК № 1

Цели: повторить схему исследования функции для построения её графика и рассмотреть исследование функции с помощью производной.

Ход урока

I. Итоги самостоятельной работы

II. Повторение пройденного материала

1. Повторить схему исследования функции.
2. Исследование функции на возрастание (убывание) и на экстремум удобно проводить с помощью производной.

III. Изучение нового материала

1. Разобрать по учебнику пример 1. Пояснить составление таблицы и построение графика на рис. 111.

2. Исследовать функцию и построить её график: $y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2$.

Решение.

а) область определения – D(y)=R;

б) функция не является ни чётной, ни нечётной, ни переодической;

в) найдём точки пересечения графика с осью OX (т.е. нули функции):

$\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2=0;\ 3x^4-4x^3-12x^2=0;\ x^2\left(3x^2-4x-12\right)=0;$

$x_1=0;\ x_2\approx-1{,}4;\ x_3\approx2{,}8.$

Пересечение с осью OY: x=0, y=0.

Возьмём также две дополнительные точки: $y(1)=-\frac{13}{12};\ y(3)=\frac{9}{4};$

г) находим производную:

$y'=x^3-x^2-2x=x\left(x^2-x-2\right)=x(x+1)(x-2).$

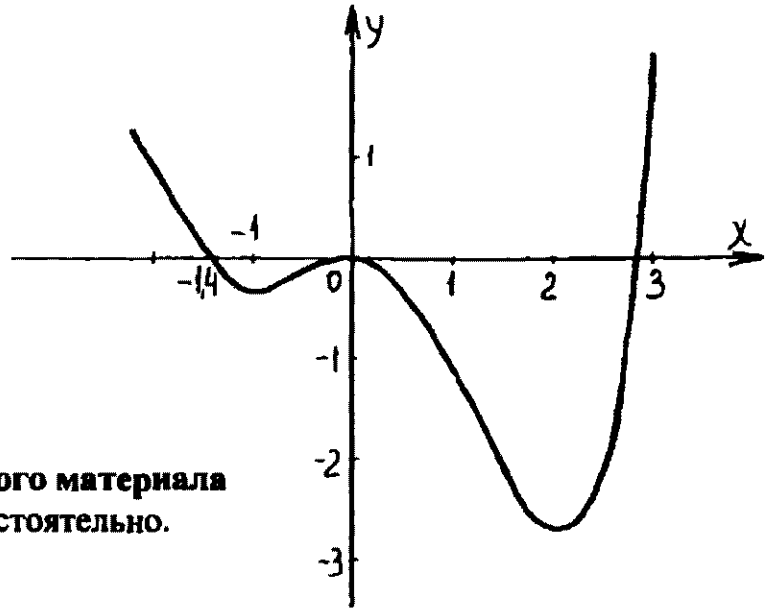
$y'=0,\ x(x+1)(x-2)=0,\qquad x=0,\ x=-1,\ x=2;$

д) найденные критические точки разбивают числовую прямую на четыре промежутка: $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;2)$, $(2;+\infty)$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{5}{12}$	↗	0	↘	$-\frac{8}{3}$	↗
	убывает	min	возрастает	max	убывает	min	возрастает

Строим график:



IV. Закрепление изученного материала

1. Решить № 296(а). Самостоятельно.
2. Выполнить № 299(а; б).

V. Итоги урока

VI. Домашнее задание: п. 24; № 296(в; г), № 299(в; г).

УРОК № 2

Цели: упражнять учащихся в исследовании функции с помощью производной и построении графиков функций.

Ход урока

I. Устная работа

1. Описать схему исследования функции.
2. Назовите по следующим данным промежутки возрастания, убывания и точки максимума и минимума:

а)

x	$(-7; 1)$	1	$(1; 6)$	6	$(6; 7)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(x)$		10		−3	

б)

x	(−3; 0)	0	(0; 4)	4	(4; 8)	8	(8; +∞)
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$		−3		−5		6	

3. По данным каждой из таблиц схематически построить график (на доске и в тетрадях).

II. Выполнение упражнений

1. Решить № 298(а; б).

2. Исследовать функцию и построить её график $y = \dfrac{x}{x^2-4}$.

Решение.

а) $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$;

б) функция является нечётной, т.к $f(-x) = -f(x)$.

График симметричен относительно начала координат.

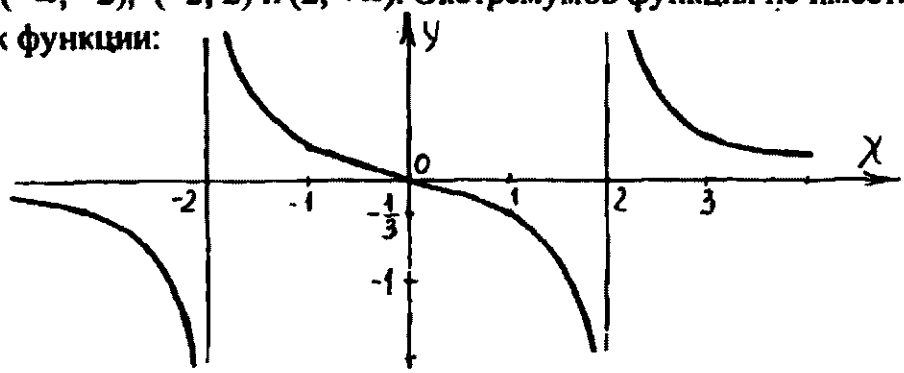
в) если $x=0$, то $y=0$, то есть точка (0; 0) принадлежит графику функции. Ещё две дополнительные точки : $y(1) = -\dfrac{1}{3}$; $y(3) = 0{,}6$;

г) находим производную: $f'(x) = y' = \dfrac{x'(x^2-4) - (x^2-4)' \cdot x}{(x^2-4)^2} =$

$$= \frac{x^2-4-2x\cdot x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2} = -\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2};$$

д) $f'(x) < 0$ при всех значениях $x \in D(f)$. Следовательно, функция убывает на промежутках $(-\infty; -2)$, $(-2; 2)$ и $(2; +\infty)$. Экстремумов функция не имеет.

е) строим график функции:



3. Выполнить № 300(а; б) (на доске и в тетрадях).

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание: п. 24; выполнить № 298(в; г), № 300(г), № 301(г).

УРОК № 3

Цели: развивать навыки исследования функций и построения графиков; закрепить знания нахождения промежутков возрастания и убывания функции, экстремумов функции с помощью производной.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания

1. На доске № 300(г) – построить график, о свойствах рассказать устно.
2. Проверить решение № 298(в; г).

II. Выполнение упражнений

Исследуйте функцию и постройте её график:

1. № 301(а). $f(x) = x^2\sqrt{1+x}$.

Указание: возрастает на $[-1;\ -\frac{4}{5}]$ и на $[0;\ +\infty)$, убывает на $[-\frac{4}{5};0]$;

$x = -\frac{4}{5}$ - точка максимума, $x = 0$ - точка минимума; $D(f)=[-1;\ +\infty)$.

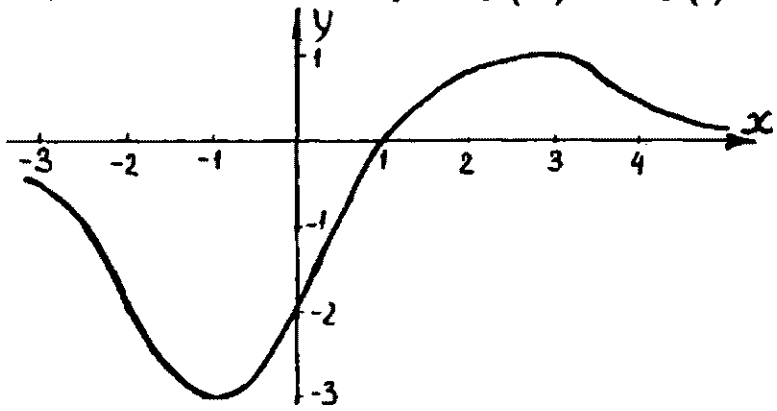
2. № 301(б). $f(x) = \frac{6(x-1)}{x^2+3}$.

Указание:

$D(f)=R$; возрастает на $[-1;\ 3]$, убывает на $(-\infty;\ -1]$ и на $[3;\ +\infty)$;

$x = -1$ - точка минимума, $x = 3$ - точка максимума; $f(-1) = -3$; $f(3) = 1$.

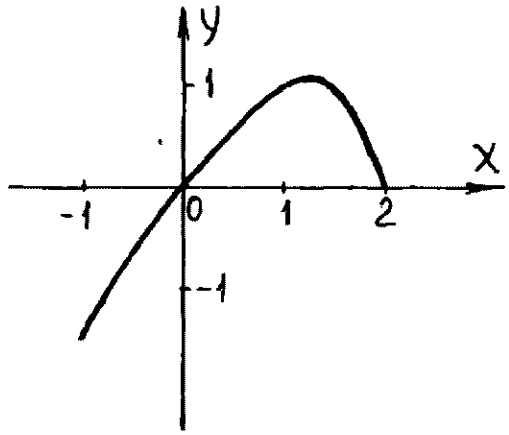
График:



3. № 301(в). $f(x) = x\sqrt{2-x}$.

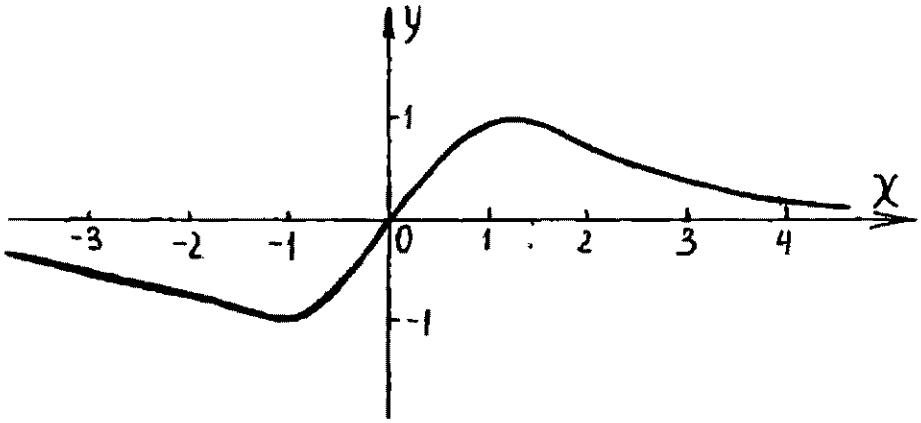
Указание: D(*f*)=(–∞; 2]; возрастает на $(-\infty; \frac{4}{3}]$, убывает на $[\frac{4}{3}; 2]$; $x = \frac{4}{3}$ - точка максимума.

График:



4. Решить № 302(б). $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

Указание: D(*f*) = R; график симметричен относительно начала координат:



5*. Исследовать функцию и построить её график: $f(x) = \sin x - 0{,}5\sin 2x$.

Решение.

а) D(*f*)=R;

б) имеем $f(-x) = \sin(-x) - 0{,}5\sin(-2x) = -\sin x + 0{,}5\sin 2x =$

$= -(\sin x - 0{,}5\sin 2x) = -f(x)$.

Функция нечётная. Функция периодическая с основным периодом T=2π. График симметричен относительно начала координат, ассимптот график не имеет. Исследование функции проведём для отрезка [0; π];

в) найдём точки пересечения графика с осью OX:

$y = 0$; $\sin x - 0{,}5\sin 2x = 0$, $\sin x - \sin x\cos x = 0$, $\sin x(1-\cos x) = 0$,

$\sin x = 0$ или $1 - \cos x = 0$

$x=\pi n,\ n\in Z$ $\qquad\qquad$ $\cos x=1,\ \ x=2\pi k,\ k\in Z.$

На отрезке $[0;\ \pi]$ имеем два корня $x_1=0$ и $x_2=\pi$. Следовательно, график функции не пересекает оси абсцисс ни в какой внутренней точке отрезка $[0;\ \pi]$;

г) в интервале $(0;\ \pi)$ функция принимает только положительные значения.

$f(0)=0;\ \ f(\pi)=0;$

д) найдём точки экстремума.

$y'=\cos x-\cos 2x;\quad y'=0,\ \cos x-\cos 2x=0,\ \cos x-\cos^2 x+\sin^2 x=0,$

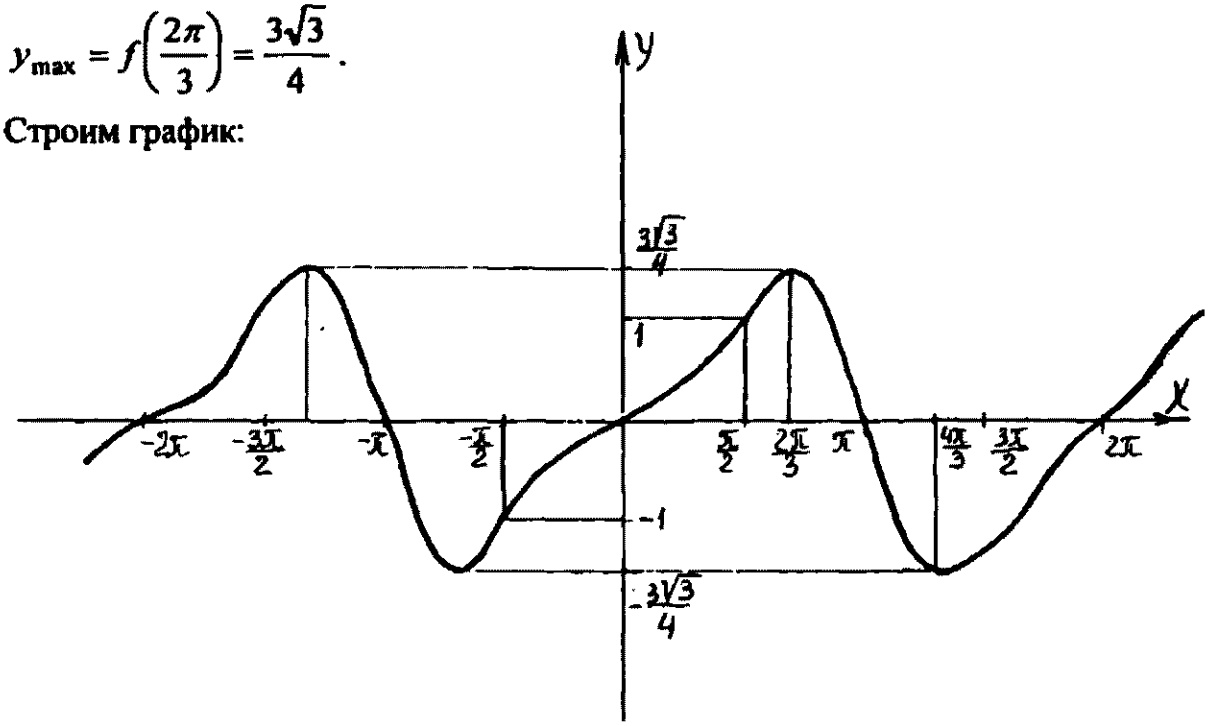
$\cos x-\cos^2 x+1-\cos^2 x=0,\ 2\cos^2 x-\cos x-1=0,\ \cos x=1,\ \cos x=-\frac{1}{2}.$

$x_1=0,\ x_2=\frac{2\pi}{3}$ (берём корни из отрезка $[0;\ \pi]$).

Точка $x=\frac{2\pi}{3}$ - точка максимума, так как на концах отрезка $[0;\ \pi]$ функция обращается в нуль, а всюду внутри отрезка она положительна.

$y_{\max}=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}.$

Строим график:



III. Итоги урока

IV. Домашнее задание: № 300(в), № 303.

НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ (3Ч)

УРОК № 1

Цели: проверить усвоение учащимися исследования функций и построения графиков; ввести правило нахождения наибольшего и наименьшего значения функции.

Ход урока

I. Самостоятельная работа (10–15 минут)

Исследуйте функцию с помощью производной и постройте её график:

Вариант I. $f(x) = 2x^4 + \frac{8}{3}x^3$. *Вариант II.* $f(x) = 4x^4 - \frac{16}{3}x^3$.

II. Объяснение нового материала

1. Решение многих практических задач часто сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции.
2. Теорема Вейерштрасса (рис. 112, рис. 113).
3. Записать в тетрадях *алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции* $y = f(x)$ *на отрезке* $[a; b]$:

а) найти $f'(x)$;

б) найти точки, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует, и отобрать из них те, что лежат внутри отрезка $[a; b]$;

в) вычислить значения функции $y = f(x)$ в точках, полученных в п. (б), и на концах отрезка и выбрать из них наибольшее и наименьшее; они и будут соответственно наибольшим и наименьшим значениями функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, которые обозначают так: $\max\limits_{[a;b]} y(x)$ и $\min\limits_{[a;b]} y(x)$.

4. Разобрать пример 1 учебника.

III. Закрепление изученного материала

1. (Объясняет учитель.) Найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 225$ на отрезке [0; 6].

Решение.

D(y)=R.

а) $y' = 3x^2 - 6x - 45$;

б) y' существует при всех x. Найдём точки критические, в которых $y' = 0$.

Имеем: $3x^2 - 6x - 45 = 0$, $x^2 - 2x - 15 = 0$, $x_1 = -3$, $x_2 = 5$.

Отрезку [0; 6] принадлежит лишь точка x=5.

в) вычислим значения функции в точках 0, 5, 6:

$y(0) = 225$, $y(5) = 50$, $y(6) = 63$.

Ответ: $\max\limits_{[0;6]} y(x) = y(0) = 225$; $\min\limits_{[0;6]} y(x) = y(5) = 50$.

2. Решить № 305(а; б) (на доске и в тетрадях).

3. (Самостоятельно решают.) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \frac{x^4}{2} - 2x + \frac{3}{2}$ на отрезке [−1; 2].

Ответ: $\max\limits_{[-1;2]} f(2) = 5{,}5$; $\min\limits_{[-1;2]} f(1) = 0$.

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание: п. 25; № 305(в; г), № 306(а), № 295(б).

УРОК № 2

Урок типовых задач.

Цель: рассмотреть применение метода поиска наибольших и наименьших значений функции к решению разнообразных прикладных задач.

Ход урока

I. Итоги самостоятельной работы

II. Решение задач

1. Метод поиска наибольших и наименьших значений функции применим к решению разнообразных прикладных задач (разобрать схему на стр. 151–152).

2. Рассмотреть решение примера 2 (рис. 114).

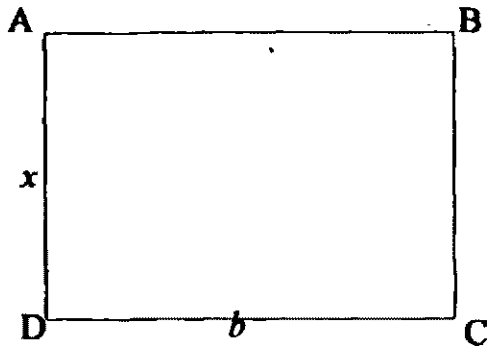
3. Записать в тетрадях важный практический вывод для решения геометрических задач на нахождение наибольшего или наименьшего значения:

Если непрерывная на промежутке функция имеет единственную точку экстремума x_0, то в случае максимума значение $f(x_0)$ наибольшее на этом промежутке, а в случае минимума значение $f(x_0)$ наименьшее на этом промежутке.

4. Задача 1.

Найти размеры участка прямоугольной формы, имеющего наибольшую площадь, если его периметр равен 200 м.

Решение.



P=200 м; пусть AD=x, DC=b, тогда периметр прямоугольника ABCD будет равен $(x + b) \cdot 2 = 200$, $(x + b) = 100$, отсюда $b = 100 - x$, где $0<x<100$.

Площадь прямоугольника равна $S = x \cdot b = x \cdot (100 - x) = 100x - x^2$, где $0<x<100$.

Так как функция $S(x)$ непрерывная на всей числовой прямой, то будем искать её наибольшее значение на отрезке [0; 100].

Найдём производную функции $S(x) = 100x - x^2$:

$$S'(x) = \left(100x - x^2\right)' = 100 - 2x.$$

Найдём критические точки функции:

$S'(x) = 0$, $S'(x) = 100 - 2x$; $100 - 2x = 0$, $x = 50$.

Найдём значение функции на концах отрезка и в критических точках:

$S(0) = 0$; $S(50) = 50 \cdot (100 - 50) = 2500$; $S(100) = 0$.

Значит, наибольшей будет площадь участка 2500 м^2, а стороны участка равны 50 м и 50 м.

Ответ: 50 м и 50 м.

5. Задача 2.

Число 15 представьте в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы произведение квадрата первого из них на второе было наибольшим.

Ответ: 15 = 10 + 5.

6. Задача 3.

Число 12 представьте в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма куба первого слагаемого и утроенного второго слагаемого была наименьшей.

Решение.

Обозначим через x первое слагаемое, тогда второе слагаемое $(12-x)$, а сумма куба первого слагаемого и утроенного второго слагаемого равна $x^3 + 3(12 - x)$. По условию задачи число x удовлетворяет неравенству

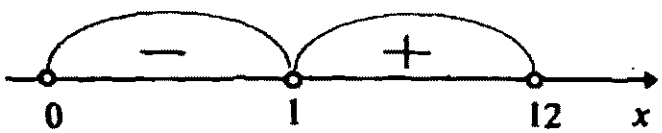
$0<x<12$. Рассмотрим функцию $f(x)=x^3+3(12-x)$ на интервале (0; 12), в котором она непрерывна и дифференцируема.

Найдём критические точки функции:

$$f'(x)=\left(x^3-3x+36\right)'=3x^2-3;$$

$$f'(x)=0,\ 3x^2-3=0,\ x^2=1;\quad x_1=-1,\ x_2=1.$$

$$-1\notin(0;12),\ 1\in(0;12).$$



$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-3=\frac{3}{4}-3=-2\frac{1}{4}<0;$$

$$f'(2)=3\cdot 2^2-3=12-3=9>0.$$

При переходе через точку $x=1$ производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно, $x=1$ является точкой минимума. Минимум функции в этой точке есть наименьшее значение, так как в промежутке (0; 12) этот экстремум единственный. Первое слагаемое равно 1, второе равно 11.

Ответ: 12=1+11.

7. Задача 4.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$f(x)=3-\cos x-2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$ на отрезке $[0;2\pi]$.

Решение.

$$D(f)=R;\quad f'(x)=\left(3-\cos x-2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right)'=\sin x-\sqrt{2}\cos\frac{x}{2};$$

$$f'(x)=0,\quad 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}=0,\ \cos\frac{x}{2}\left(2\sin\frac{x}{2}-\sqrt{2}\right)=0,$$

$$\cos\frac{x}{2}=0\quad\text{или}\quad\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z\quad\text{или}\quad\frac{x}{2}=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z;$$

$$x=\pi+2\pi n, n\in Z\quad\text{или}\quad x=(-1)^k\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z;$$

$f(0) = 3 - \cos 0 - 2\sqrt{2}\sin 0 = 3 - 1 = 2;$

$f(\pi) = 3 - \cos\pi - 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{2} = 4 - 2\sqrt{2};$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 - \cos\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = 3 - 0 - 2 = 1;$

$f(2\pi) = 3 - \cos 2\pi - 2\sqrt{2}\sin\pi = 3 - 1 = 2;$

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3 - 0 - 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 3 - 0 - 2 = 1.$

Ответ: $\max\limits_{[0;2\pi]} f(x) = f(0) = f(2\pi) = 2$; $\min\limits_{[0;2\pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1.$

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание: повторить из § 6 п. 22–25; № 310(а; б), № 311, № 312, №313.

УРОК № 3

Цели: закрепить знания учащихся; упражнять в решении задач; подготовиться к контрольной работе.

Ход урока

I. Повторение изученного материала

1. Устно по вопросам:

а) сформулируйте признак возрастания (убывания) функции;

б) какую точку называют критической точкой функции ?

в) сформулируйте правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

2. Решить задачи, вызвавшие затруднения у учащихся при выполнении домашнего задания.

II. Подготовка к контрольной работе

1. Решить № 314.

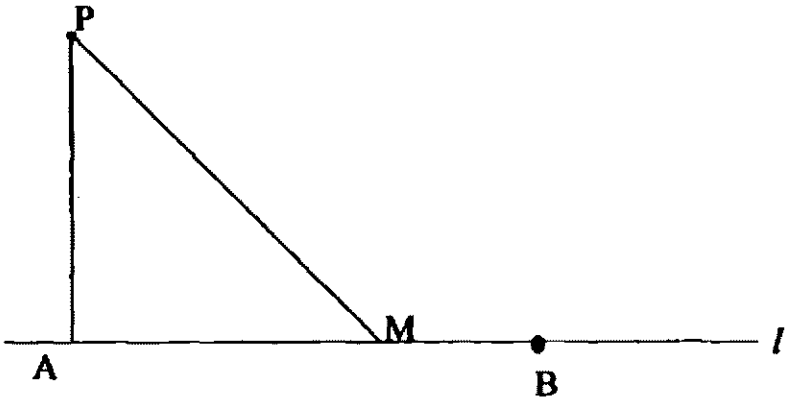
Указание: пусть I-е слагаемое равно x, II-е слагаемое $2x$, III-е слагаемое $(54-3x)$. Исследуем функцию $f(x) = x\cdot 2x\cdot(54-3x) = 108x^2 - 6x^3$, где $0<x<54$.

Ответ: 54 = 12 + 24 + 18.

2. Решить № 320.

Решение.

Сделаем чертёж.



Точка P означает местонахождение буровой вышки, прямая l – шоссе, B – населённый пункт, PA = 9 км, AB = 15 км.

Пусть t – время движения курьера из P в B; надо найти t наименьшее.

Обозначим AM = x, где $0 \le x \le 15$. Выразим t через x.

Имеем: $PM = \sqrt{PA^2 + AM^2} = \sqrt{81 + x^2}$. Этот путь велосипедист едет со скоростью 8 км/ч, то есть время, затраченное на этот путь, $t_1 = \dfrac{\sqrt{81+x^2}}{8}$.

Далее, MB = 15–x. Этот путь велосипедист едет со скоростью 10 км/ч, то есть время, затраченное на этот путь, $t_2 = \dfrac{15-x}{10}$.

Суммарное время t, затраченное на весь путь, равно t_1+t_2, то есть

$t = \dfrac{\sqrt{81+x^2}}{8} + \dfrac{15-x}{10}$. Нужно найти наименьшее значение функции $t = \dfrac{\sqrt{81+x^2}}{8} + \dfrac{15-x}{10}$ на отрезке [0; 15].

Находим критические точки функции:

$$t' = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\left(81+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x + \frac{1}{10}\cdot(-1) = \frac{x}{8\sqrt{81+x^2}} - \frac{1}{10}.$$

t' существует при всех x. Найдём точки, в которых $t' = 0$. Имеем:

$$\frac{x}{8\sqrt{81+x^2}} - \frac{1}{10} = 0, \quad 5x = 4\sqrt{81+x^2}, \quad 25x^2 = 16\left(81+x^2\right),$$

$9x^2 = 16 \cdot 81$, $x = 4 \cdot 3 = 12$. Значение $x = 12$ принадлежит отрезку [0; 15].

$t(0) = \frac{105}{40}$; $t(12) = \frac{87}{40}$; $t(15) = \frac{5\sqrt{306}}{40}$.

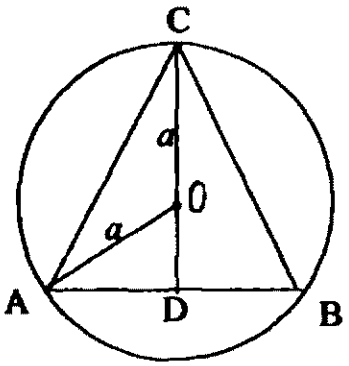
Наименьшее $t = \frac{87}{40}$ при x=12.

Значит, AM=12 км, MB=3 км.

Ответ: 3 км, 12 км.

3*. Решить № 325.

Решение.



Пусть радиус AO=OC=a. Обозначим $\angle ACB = \alpha$, тогда по теореме синусов имеем AB=$2a\sin\alpha$. Далее из ΔADC:

$$CD = AD \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = a\sin\alpha \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = a\sin\alpha \cdot \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} =$$

$= a \cdot (1+\cos\alpha)$.

Рассмотрим площадь треугольника, как функцию переменной α, где $0 < \alpha < \pi$:

$$S(\alpha) = \frac{AB \cdot CD}{2} = a^2 \sin\alpha(1+\cos\alpha) = a^2\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right).$$

$$S'(\alpha) = a^2 \cdot (\cos\alpha + \cos 2\alpha) = a^2 \cdot \left(2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1\right) =$$

$$= a^2(\cos\alpha + 1)(2\cos\alpha - 1).$$

Так как $\cos\alpha + 1 > 0$ $(\alpha \in (0;\pi))$, то $S'(\alpha) = 0$ при $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Если $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$, то $S'(\alpha) > 0$, то есть $S(\alpha)$ возрастает на $\left(0; \frac{\pi}{3}\right]$.

Если $\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi$, то $S'(\alpha) < 0$, то есть $S(\alpha)$ убывает на $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right)$.

Значит, $\max\limits_{(0;\pi)} S(\alpha) = S\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Если $\alpha = \frac{\pi}{3}$, то треугольник равносторонний.

4. Решить № 306(б) (самостоятельно).

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание

1. Повторить материал к контрольной работе из § 6 п. 22–25.
2. Решить № 307, № 315, № 318; на стр. 167–168 решить № 8.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6 (1 Ч)

Цели: проверить усвоение учащимися изученного материала; развитие логического мышления учащихся.

Ход урока

I. Организация учащихся на выполнение контрольной работы

II. Выполнение работы по вариантам

Вариант I

1. Дана функция $f(x) = -x^3 + 3x + 2$:

а) найдите промежутки возрастания и убывания функции;

б) найдите наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке [1; 3].

2. Число 48 представьте в виде суммы трёх положительных слагаемых таким образом, чтобы два из них были равны между собой, а произведение всех слагаемых было наибольшим.

Вариант II

1. Дана функция $f(x) = x^3 - 3x - 6$:

а) найдите промежутки возрастания и убывания функции;

б) найдите наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке [–2; 0].

2. Число 72 представьте в виде суммы трёх положительных слагаемых таким образом, чтобы два из них были пропорциональны числам 1 и 3, а произведение всех слагаемых было наибольшим.

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание: повторить § 1 «Тригонометрические функции числового аргумента».

ИТОГОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА ЗА X КЛАСС (7 Ч)

УРОК № 1

Цели: повторить тригонометрические функции числового аргумента и закрепить знание формул в ходе упражнений.

Ход урока

I. Анализ контрольной работы

II. Повторение изученного ранее материала

1. Определение основных тригонометрических функций.
2. Основные формулы тригонометрии.
3. Тригонометрические функции и их графики.

III. Выполнение упражнений

1. Упростить $\dfrac{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

Решение.

Будем полагать, что данное выражение имеет смысл при всех допустимых значениях α.

$$\frac{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha\left(\cos^2\alpha-1\right)}{\operatorname{ctg}^2\alpha\left(\sin^2\alpha-1\right)}=\frac{-\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha}{-\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}^6\alpha.$$

2. Дано $\sin x+\cos x=k$. Найти $\sin^4 x+\cos^4 x$.

Решение.

Дополним выражение $\sin^4 x+\cos^4 x$ до квадрата двучлена:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x=$$

$$=1-2(\sin x\cos x)^2.$$

Возведём обе части равенства $\sin x+\cos x=k$ в квадрат, получим:

$1+2\cos x\sin x=k^2$, откуда $\sin x\cos x=\dfrac{k^2-1}{2}$. Тогда

$$1-2(\sin x\cos x)^2=1-2\left(\frac{k^2-1}{2}\right)^2=0{,}5+k^2-0{,}5k^4.$$

Значит, $\sin^4 x+\cos^4 x=0{,}5+k^2-0{,}5k^4$.

3. Доказать, что $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=1$, если $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$.

Решение.

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha)=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)\cdot(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha)=$$

$$=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)\cdot(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha)=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}\cdot(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha)=$$

$$=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=1.$$

4. Доказать, что $\sin 10^0\sin 50^0\sin 70^0=\frac{1}{8}$.

Решение.

Умножив и разделив левую часть равенства на $2\cos 10^0$, получим

$$\frac{2\cos 10^0\sin 10^0\sin 50^0\sin 70^0}{2\cos 10^0}=\frac{\sin 20^0\sin 50^0\sin 70^0}{2\cos 10^0}=$$

$$=\frac{\sin 20^0\cdot\cos 20^0\sin 50^0}{2\cos 10^0}=\frac{\sin 40^0\sin 50^0}{2\cdot 2\cos 10^0}=\frac{\sin 40^0\sin\left(90^0-40^0\right)}{4\cos 10^0}=$$

$$=\frac{\sin 40^0\cos 40^0}{4\cos 10^0}=\frac{\sin 80^0}{2\cdot 4\cos 10^0}=\frac{\cos 10^0}{8\cos 10^0}=\frac{1}{8}.$$

5. Доказать, что $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$, где A, B, C – углы треугольника.

Решение.

$$\sin C=\sin\left(180^0-(A+B)\right)=\sin(A+B)=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2};$$

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}=$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)=4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=$$

$$=4\sin\frac{180^0-C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}.$$

4. Вычислить без таблиц: $\operatorname{tg}112^0 30'$.

Решение.

$$\operatorname{tg}112^0 30' = \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1-\cos 225^0}{\sin 225^0} = \frac{1-\cos\left(180^0+45^0\right)}{\sin\left(180^0+45^0\right)} = \frac{1+\cos 45^0}{-\sin 45^0} =$$

$$= -\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right):\frac{\sqrt{2}}{2} = -\left(1+\sqrt{2}\right).$$

7. Вывести формулы преобразования $\sin\alpha\cos\beta$, $\cos\alpha\cos\beta$, $\sin\alpha\sin\beta$.

Решение.

а) известно, $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$,

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$,

складывая эти соотношения, находим: $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$,

откуда $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$;

б) известно, $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$,

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

Вычитая первое соотношение из второго, находим

$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$, откуда получаем:

$\sin\alpha\sin\beta, = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$;

в) самостоятельно выводят $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$.

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание: повторить материал § 2 и § 3; решить на стр. 271 № 52, № 53, № 54, № 56.

УРОК № 2

Цели: повторить решение тригонометрических уравнений, закрепить знание основных формул тригонометрии.

Ход урока

I. Повторение материала

1. Сформулируйте определение арксинуса числа. Для каких чисел определён арксинус ?
2. Сформулируйте определение арккосинуса и арктангенса числа. Для каких чисел определены арккосинус и арктангенс ?
3. Запишите формулы для решения простейших тригонометрических уравнений: $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\operatorname{tg} x=a$. При каких значениях a эти уравнения имеют решения ?

II. Выполнение упражнений

1. Решите уравнение:

а) $8\cos^2 x+6\sin x-3=0$.

Указание: $8\left(1-\sin^2 x\right)+6\sin x-3=0$.

Ответ: $x=\left(-1\right)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$.

б) найти корни уравнения $3\operatorname{ctg}^4 x-4\operatorname{cosec}^2 x+5=0$, принадлежащие промежутку $(0;\ \pi)$.

Решение.

По формуле $\operatorname{cosec}^2 x=1+\operatorname{ctg}^2 x$, получаем $3\operatorname{ctg}^4 x-4\operatorname{ctg}^2 x+1=0$,

$\operatorname{ctg}^2 x=\dfrac{2\pm 1}{3}$.

1) $\operatorname{ctg}^2 x=1$, то есть $\operatorname{ctg} x=\pm 1$:

а) $\operatorname{ctg} x=1$, откуда $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$; $x=\dfrac{\pi}{4}$ (при $k=0$) принадлежит промежутку $(0;\ \pi)$;

б) $\operatorname{ctg} x=-1$, откуда $x=\dfrac{3\pi}{4}+\pi k, k\in Z$; $x=\dfrac{3\pi}{4}\in(0;\pi)$;

2) $\operatorname{ctg}^2 x=\dfrac{1}{3}$, откуда $\operatorname{ctg} x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$:

а) $\operatorname{ctg} x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, откуда $x=\dfrac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$; $x=\dfrac{\pi}{3}\in(0;\pi)$;

б) $\operatorname{ctg} x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, откуда $x=\dfrac{2\pi}{3}+\pi n, n\in Z$; $x=\dfrac{2\pi}{3}\in(0;\pi)$.

Ответ: промежутку $(0;\ \pi)$ принадлежат корни: $\dfrac{\pi}{4}$; $\dfrac{3\pi}{4}$; $\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{2\pi}{3}$.

в) $3\text{tg}^3 x + \text{tg}x = 0.$

Решение.

О. Д. З. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$ $\quad \text{tg}x\left(3\text{tg}^2 x + 1\right) = 0,$

$\text{tg}x = 0$ или $3\text{tg}^2 x + 1 = 0;$

$x = \pi k, k \in Z$ $\quad \text{tg}^2 x = -\frac{1}{3}$ - нет решений.

Ответ: $x = \pi k, k \in Z$.

2. Решение уравнений, однородных относительно sin$x$ и cos$x$.

а) $2\cos x + 3\sin x = 0$.

Решение.

Разделим обе части уравнения на cos$x \neq 0$:

$3\text{tg}x + 2 = 0, \quad \text{tg}x = -\frac{2}{3}, \quad x = -\text{arctg}\frac{2}{3} + \pi n, n \in Z.$

Ответ: $x = -\text{arctg}\frac{2}{3} + \pi n, n \in Z.$

б) $22\cos^2 x + 4\sin 2x = 7.$

Решение.

$22\cos^2 x + 4 \cdot 2\sin x\cos x = 7 \cdot \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right),$

$7\sin^2 x - 8\sin x\cos x - 15\cos^2 x = 0;$ разделив обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$, находим: $7\text{tg}^2 x - 8\text{tg}x - 15 = 0, \quad \text{tg}x = \frac{4 \pm 11}{7}$:

а) $\text{tg}x = \frac{15}{7}, \quad x = \text{arctg}\frac{15}{7} + \pi m, m \in Z;$

б) $\text{tg}x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

Ответ: $x = \text{arctg}\frac{15}{7} + \pi m, m \in Z; \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

в) самостоятельно решить уравнение $\sin 2x = 2\cos^2 x.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$

3. Решить уравнения:

а) $\sin 3x\cos 2x = \sin 5x.$

Указание: представить $\sin 5x = \sin\left(3x + 2x\right).$

б) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$.

Решение.

Разделим обе части уравнения на два:

$$\sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \cos x \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2};$$

$$x - \frac{\pi}{6} = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z; \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$$

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

в) $1 + \cos x = \cos\frac{x}{2}$. **Указание:** $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$.

г) $\cos 3x + 2\cos x = 0$. **Указание:** используя формулу для $\cos 3x$, после упрощений получим $\cos x\left(4\cos^2 x - 1\right) = 0$.

д) самостоятельно решить уравнение $\cos 3x - 1 = \cos 2x$.

Указание: с помощью формул для $\cos 2x$ и $\cos 3x$ получаем $\cos x \cdot \left(4\cos^2 x - 2\cos x - 3\right) = 0$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$; $x = \pm\arccos\frac{1-\sqrt{13}}{4} + 2\pi m, m \in Z$.

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание: повторить § 1 и § 3; решить на стр. 94 № 23 и № 24.

УРОК № 3

Цель: упражнять учащихся в решении тригонометрических уравнений, неравенств, систем тригонометрических уравнений.

Ход урока

I. Устная работа

1. Решить на доске уравнения, вызвавшие дома затруднения у учащихся.
2. Вопросы:

а) является ли число π корнем уравнения $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0$? Почему ?

Ответ: да.

б) является ли число π корнем уравнения $\sin 2x \operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$?

Ответ: да.

в) при каких значениях α имеет место равенство $\sin\alpha=\cos\alpha$?

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$.

г*) найдите корни уравнений, принадлежащие промежутку $(0; 2\pi)$:

1) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ответ: $\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$.

2) $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}$. Ответ: $\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$.

II. Решение тригонометрических уравнений, неравенств, систем тригонометрических уравнений

1. Решить уравнение:

а) $4\sin x-6\cos x=1$.

Решение.

Переходя к аргументу $\frac{x}{2}$, имеем $4\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}-6\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=$

$=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}$, или $5\sin^2\frac{x}{2}+8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-7\cos^2\frac{x}{2}=0$.

После деления на $\cos^2\frac{x}{2}\neq 0$, получим $5\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+8\operatorname{tg}\frac{x}{2}-7=0$, откуда

$x=2\operatorname{arctg}\frac{-4\pm\sqrt{51}}{5}+2\pi n, n\in Z$.

б) $\sin x-\sin 2x+\sin 3x-\sin 4x=0$.

Указание: преобразуем $(\sin x+\sin 3x)-(\sin 2x+\sin 4x)=0$,

$2\sin 2x\cos x-2\sin 3x\cos x=0$, $\cos x(\sin 2x-\sin 3x)=0$.

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$; $x_2=2\pi k, k\in Z$; $x_3=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}m, m\in Z$.

в) $\cos x\cos 3x=\cos 7x\cos 5x$.

Решение.

$\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}\cos 12x+\frac{1}{2}\cos 2x$,

$\cos 4x-\cos 12x=0$, $2\sin 8x\sin 4x=0$,

$\sin 8x = 0$ или $\sin 4x = 0$,

$x = \frac{\pi}{8}k, k \in Z$ или $x = \frac{\pi}{4}k, k \in Z$.

Все корни второй группы содержатся среди корней первой группы, поэтому $x = \frac{\pi}{8}k, k \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{8}k, k \in Z$.

г) $\sin^2 x + \cos^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$.

Указание: $\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = \frac{3}{2}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n, n \in Z$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

2. Решить неравенства: № 25(2, а и г) на стр 94.

3. Решить систему уравнений: $\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

Решение.

Складывая, а затем вычитая уравнения данной системы, получим ей равносильную систему:

$$\begin{cases} \cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos(x+y) = 0; \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x - y = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in Z. \\ x + y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z. \end{cases}$$

Решим две линейные системы:

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in Z, \\ x + y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in Z, \\ x + y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}n + \pi m, \\ y = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}n - \pi m; \ n, m \in Z. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}n + \pi m, \\ y = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}n - \pi m; \ n, m \in Z. \end{cases}$$

III. Самостоятельная работа (10 мин)

Вариант I	*Вариант II*
1. Решите уравнение	1. Решите уравнение
а) $6\cos^2 x + 13\sin x = 12$;	а) $3\cos^2 x - 4\cos x - \sin^2 x - 2 = 0$;
б) $5\sin x\,\mathrm{tg}x - \sin x - 5\mathrm{tg}x + 1 = 0$.	б) $\mathrm{ctg}x \cdot \cos x - \mathrm{ctg}x - \cos x + 1 = 0$.
2. Решите неравенство $2\cos x + 1 < 0$.	2. Решите неравенство $\sqrt{2}\sin x + 1 > 0$.

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание: повторить материал § 4 и § 5; решить на стр. 285 № 152–155.

УРОК № 4

Цели: повторить понятие производной, правила вычисления производных, производные сложной и тригонометрических функций; упражнять в применении непрерывности и производной.

Ход урока

I. Итоги самостоятельной работы

II. Повторение пройденного материала

1. Сформулируйте определение производной функции в точке.
2. Сформулируйте правила вычисления производных.
3. Повторить производную сложной функции и производные тригонометрических функций.
4. Какую функцию называют непрерывной на промежутке ? Описать метод решения неравенств с одной переменной (метод интервалов).
5. Написать уравнение касательной к графику функции в точке x_0.

III. Выполнение упражнений

1. Решить № 3 на стр. 166.
2. Решить неравенство методом интервалов:

а) $\dfrac{(x-1)(x+3)(x-5)}{2x+1} \geq 0$ Ответ: $(-\infty;-3] \cup (-0{,}5;1] \cup [5;+\infty)$.

б) $\dfrac{x^2-9}{x-5} < 0$; в) $\dfrac{2x-x^2}{x-4} \geq 0$; г) $\dfrac{x^2(x^2-1)}{x-3} > 0$;

д) $\dfrac{x^2+6x}{4-3x-x^2} \geq 0$; е) $\dfrac{2x^2+x-1}{-x^2-6x+7} < 0$; ж) $x^4-6x^2+8>0$;

з) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x-3} > \dfrac{3}{x-4}$ Ответ: $(2;2{,}5)\cup(3;4)$.

3. Найдите наименьшее целое число, при котором функция

$y=\dfrac{2x^2-7x+5}{(2-x)(x-5)}$ **принимает положительное значение.**

Решение.

I способ

Найдём D(y): D(y)=($-\infty$; 2)$\cup$(2; 5)$\cup$(5; $+\infty$).

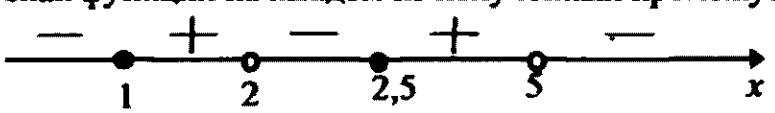
Функция непрерывна в каждой точке области определения, так как она дробно-рациональная. Нули функции: $y=0$ при

$2x^2-7x+5=0$, $D=49-40=9>0$,

$x_1=\dfrac{7-3}{4}=1$, $x_2=\dfrac{7+3}{4}=2{,}5$. $1\in D(y)$; $2{,}5\in D(y)$.

Данная функция примет вид $y=\dfrac{(x-1)(2x-5)}{(2-x)(x-5)}$.

Точки x=1, x=2, x=2,5, x=5 делят числовую прямую на пять промежутков. Определим знак функции на каждом из полученных промежутков:



$y(0)<0$, $y(1{,}5)>0$, $y(2{,}1)<0$, $y(4)>0$, $y(6)<0$.

Следовательно, $y>0$ при всех $x\in(1;2)\cup(2{,}5;5)$.

Наименьшее целое число, при котором функция принимает положительное значение, равно 3.

Ответ: 3.

II способ

По условию $y>0$, то есть $\dfrac{2x^2-7x+5}{(2-x)(x-5)}>0$.

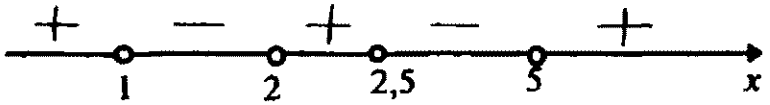
Разложим многочлен $2x^2-7x+5$ на множители:

$2x^2-7x+5=0$, $D=9>0$, $x_1=\dfrac{7-3}{4}=1$, $x_2=\dfrac{7+3}{4}=2{,}5$.

Тогда $2x^2-7x+5=2(x-2{,}5)(x-1)$.

Имеем: $\frac{2(x-2,5)(x-1)}{(2-x)(x-5)}>0$. Данное неравенство равносильно неравенству

$2(x-1)(x-2,5)(2-x)(x-5)>0;\quad (x-1)(x-2,5)(x-2)(x-5)<0.$



Решения $1<x<2$ и $2,5<x<5$. Наименьшее целое число, при котором функция принимает положительное значение, равно 3.

Ответ: 3.

4. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=\frac{3x^2+2}{x-1}$ в точке его пересечения с осью ординат.

Решение.

Уравнение касательной $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$,

точка касания: $x_0=0$, $y_0=f(0)=f(x_0)=\frac{3\cdot 0^2+2}{0-1}=-2$, то есть (0; –2).

$$f'(x)=\left(\frac{3x^2+2}{x-1}\right)'=\frac{3x^2-6x-2}{(x-1)^2};\quad f'(x_0)=f'(0)=\frac{3\cdot 0^2-6\cdot 0-2}{(0-1)^2}=-2.$$

Искомое уравнение касательной имеет вид $y=-2-2(x-0)=-2x-2$.

Ответ: $y=-2x-2$.

IV. Итоги урока

V. Домашнее задание: повторить из § 6 п. 22–24; решить № 4(3) на стр 167 и № 219 на стр 292.

УРОК № 5

Цели: повторить материал применения производной к исследованию функции, упражнять учащихся в исследовании функции и построении графиков функций.

Ход урока

I. Работа по учебнику

1. Повторить признак возрастания (убывания) функции (п. 22, пример 1).
2. Повторить необходимое условие экстремума. Признаки максимума

и минимума функции (п. 23, пример 3).
3. Повторить схему исследования функции с помощью производной (п. 24, пример 1).

II. Выполнение упражнений

Исследуйте функцию и постройте её график.

1. № 297(г).

Указание:

D(f)=R;

убывает на (–∞; 0] и [2; +∞); возрастает на [0; 2];

в точке с абсциссой x=0 функция имеет минимум $f(0)=0$;

в точке с абсциссой x=2 функция имеет максимум $f(2)=4$.

2. № 297(б).

3. Исследовать функцию $f(x)=\frac{x^5}{5}-x^3$ и построить её график.

Указание: D(f)=R, так как $f(x)$ – многочлен; критические точки $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=0$, $x_3=\sqrt{3}$.

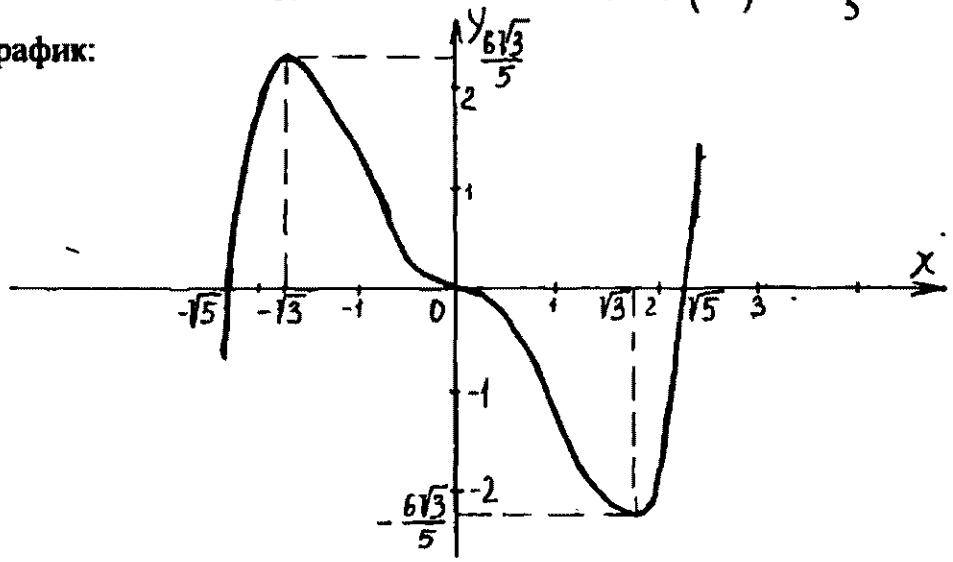
Функция возрастает на $(-\infty;\ -\sqrt{3}]$ и $[\sqrt{3};\ +\infty)$; убывает на $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$.

Точка с абсциссой x=0 является точкой перегиба.

В точке с абсциссой $x=-\sqrt{3}$ функция имеет максимум $f(-\sqrt{3})=\frac{6\sqrt{3}}{5}$,

в точке с абсциссой $x=\sqrt{3}$ функция имеет минимум $f(\sqrt{3})=-\frac{6\sqrt{3}}{5}$.

Строим график:



4. Самостоятельно учащиеся исследуют функцию $f(x)=x^4-4x^2$ и строят

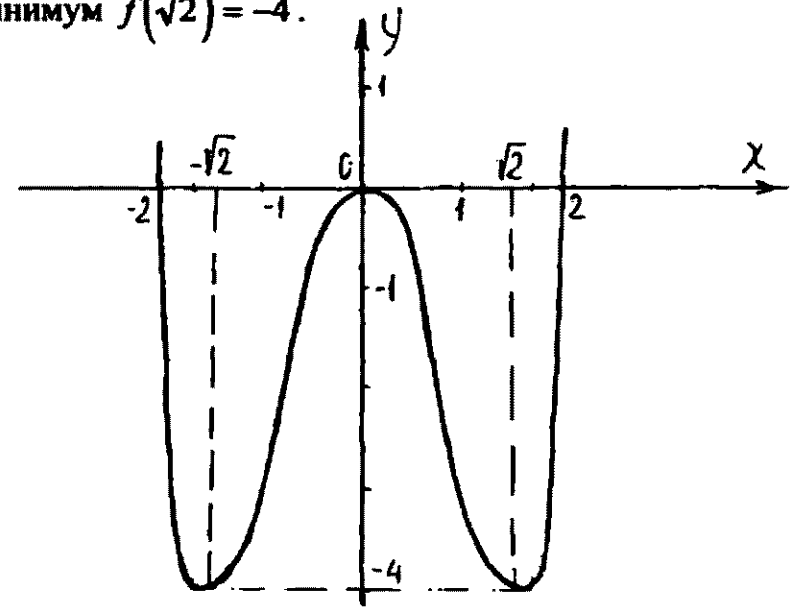
её график. (Затем проверить на доске построение графика.)

Указание:

D(*f*)=R; функция чётная, график симметричен относительно оси ординат; критические точки $x_1=-\sqrt{2}$, $x_2=0$, $x_3=\sqrt{2}$; функция убывает на $(-\infty;-\sqrt{2}]$ и $[0;\sqrt{2}]$; возрастает на $[-\sqrt{2};0]$ и $[\sqrt{2};+\infty)$.

В точке с абсциссой $x=-\sqrt{2}$ функция имеет минимум $f\left(-\sqrt{2}\right)=-4$, в точке с абсциссой $x=0$ функция имеет максимум $f(0)=0$, в точке с абсциссой $x=\sqrt{2}$ функция имеет минимум $f\left(\sqrt{2}\right)=-4$.

Строим график:



III. Итоги урока

IV. Домашнее задание: повторить из § 6 п. 22–25; решить № 297(в), № 300(в), № 298(в)

УРОК № 6

Цели: проверить знания учащихся по умению исследовать функцию и строить её график; упражнять в решении задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции.

Ход урока

I. Проверочная работа (10 минут)

Вариант I	*Вариант II*
Исследовать функцию и построить её график:	
$f(x)=-x^4+2x^2$	$f(x)=-x^3+3x-2$

II. Решение задач

1. Повторить метод поиска наибольших и наименьших значений функции.

2. Определить наибольшее и наименьшее значения функции $y=\frac{x^2}{2-x}$ на отрезке [–2; 1]. Ответ: $\max\limits_{[-2;1]} y(x)=y(-2)=y(1)=1$; $\min\limits_{[-2;1]} y(x)=y(0)=0$.

3. Найти наибольшее значение функции

$f(x)=4-\frac{1}{2}\cos 2x-\sqrt{3}\sin x$ на отрезке $[0;\ \pi]$.

Решение.

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\sin 2x-\sqrt{3}\cos x=\sin 2x-\sqrt{3}\cos x.$$

$$f'(x)=0,\qquad \sin 2x-\sqrt{3}\cos x=0,$$

$$2\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos x=0,$$

$$\cos x\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)=0,$$

$\cos x=0$ или $2\sin x-\sqrt{3}=0$, $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ или $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$.

$x=\frac{\pi}{2}\in[0;\pi]$; $x=\frac{\pi}{3}\in[0;\pi]$, $x=\frac{2\pi}{3}\in[0;\pi]$.

$$f(0)=4-\frac{1}{2}\cos 0-\sqrt{3}\sin 0=4-\frac{1}{2}=3\frac{1}{2};$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=4-\frac{1}{2}\cos\pi-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{2}=4+\frac{1}{2}-\sqrt{3}=4\frac{1}{2}-\sqrt{3};$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=4-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}=4+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\frac{3}{4};$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=4-\frac{1}{2}\cos\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{3}=2\frac{3}{4};$$

$$f(\pi)=4-\frac{1}{2}\cos 2\pi-\sqrt{3}\sin\pi=4-\frac{1}{2}\cdot 1-\sqrt{3}\cdot 0=3\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\max\limits_{[0;\pi]} f(x)=f(0)=f(\pi)=3\frac{1}{2}$.

4. Решить задачу № 316. Ответ: 8 см, 8 см.
5. Решить задачу: число 10 представьте в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.
Указание : пусть I-е слагаемое равно x, II-е слагаемое равно $(10-x)$.
Функция $f(x)=x^2+(10-x)^2=x^2+100-20x+x^2=2x^2-20x+100$,
где $0<x<10$.
Ответ: $10=5+5$.

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание
1. Повторить весь материал, готовиться к итоговой контрольной работе.
2. Решить № 315; на стр 294 № 235(а; б).

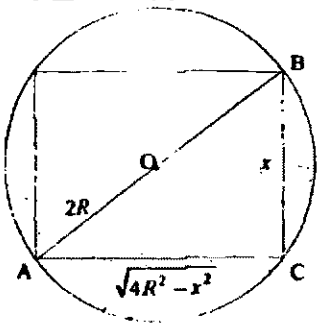
УРОК № 7

Цели: повторение и систематизация изученного материала; подготовка к контрольной работе.

Ход урока

I. Анализ проверочной работы
1. Указать ошибки, допущенные учащимися в работе.
2. Обобщить и систематизировать изученный материал. Назвать темы, на которые надо обратить внимание, чтобы выполнить контрольную работу.

II. Выполнение упражнений
1. Решить задачу № 324.
Решение.



Пусть радиус окружности равен AO=OB=R.
Обозначим BC=x, тогда AB=2R, AC=$\sqrt{4R^2-x^2}$, где $0<x<2R$.
Площадь прямоугольника $S(x)=x\sqrt{4R^2-x^2}$, где $0<x<2R$.
Найдём наибольшее значение функции S(x) на отрезке [0; 2R]. Имеем $S'(x)=0$; $\sqrt{4R^2-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}}=0$,
$4R^2-2x^2=0$, откуда $x=R\sqrt{2}$. (значение $x=-R\sqrt{2}$ не удовлетворяет

условию). Сравним значения функции при $x = R\sqrt{2}$ (в точке экстремума), x=0 и x=2R (на концах отрезка): $S(0) = S(2R) = 0$, $S\left(R\sqrt{2}\right) = 2R^2$. Значит, функция принимает наибольшее значение на [0; 2R] при $x = R\sqrt{2}$. Поскольку наибольшее значение функции S(x) на отрезке [0; 2R] достигается во внутренней точке отрезка, то наибольшее её значение S(x) на интервале (0; 2R) также достигается в точке $x = R\sqrt{2}$. При этом длина другой стороны прямоугольника равна $\sqrt{4R^2 - x^2} = R\sqrt{2}$, то есть искомым прямоугольником служит квадрат.

Ответ: квадрат.

Замечание:

1) при отыскании наибольшего значения функции S(x) удобно записать её в виде $S(x) = \sqrt{4R^2x^2 - x^4}$. Далее найти наибольшее значение функции $f(x) = 4R^2x^2 - x^4$ на заданном интервале (0; 2R). Наибольшее значение функции S(x) будет достигаться в той же точке, что и для функции $f(x)$, так как функция $y = \sqrt{t}$ возрастает на [0; +∞);

2) данную задачу можно решить и без использования производной. Пусть величина угла между диагоналями прямоугольника равна α. Тогда площадь прямоугольника равна половине произведения длин диагоналей на синус угла между ними, то есть

$$S(\alpha) = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot 2R\cdot 2R\cdot\sin\alpha = 2R^2\sin\alpha.$$

Очевидно, что наибольшее значение функции S(α) достигается, если $\sin\alpha = 1$, то есть $\alpha = 90^0$. Значит, прямоугольник является квадратом.

2. Решить задачу № 322.

3. Решить уравнение:

а) $2\cos^2 x + \sin 2x - 4\sin^2 x = 0$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$; $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi m, m \in Z$.

б) найти решения уравнения $5\cos 2x + 7\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0$, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Ответ: $\frac{5\pi}{6}$.

4. Решить неравенство методом интервалов (учащиеся решают самостоятельно с последующей проверкой):

а) $\frac{x^2-5x}{x-2} \geq 0$; б) $\frac{x+8}{3x-x^2} \leq 0$.

III. Итоги урока

IV. Домашнее задание

1. Повторить весь изученный материал к контрольной работе.
2. Решить на стр. 168 № 10(2) а; в , № 157, № 144.

ИТОГОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 7 (2Ч)

Цели: проверить знания учащихся и выяснить степень усвоения материала за курс десятого класса.

Ход урока

I. Организация учащихся на выполнение контрольной работы

II. Выполнение работы

Вариант I

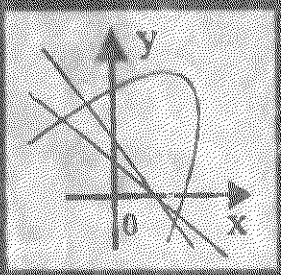
1. Решите неравенство $\frac{x-5}{2x-x^2} \leq 0$.
2. Решите уравнение $3\cos^2 x - \sin^2 x + 4\sin x = 0$.
3. Исследуйте функцию и постройте её график $f(x) = 4x^2 - 0{,}5x^4$.
4. Площадь прямоугольника равна 36 дм^2. Какую длину должны иметь стороны прямоугольника, чтобы его периметр был наименьшим ?

Вариант II

1. Решите неравенство $\frac{x^2-4x}{x-1} \geq 0$.
2. Решите уравнение $8\sin^2 x - 2\cos x - 5 = 0$.
3. Исследуйте функцию и постройте её график $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$.
4. Число 16 представьте в виде произведения двух положительных множителей, сумма квадратов у которых наименьшая.

101

ПОСОБИЯ
ДЛЯ АБИТУРИЕНТОВ
ПОМОГУТ ЗА 20-30 ЧАСОВ
САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ
ЗАНЯТИЙ
ПОДГОТОВИТЬСЯ
К ЭКЗАМЕНАМ



ПОСОБИЯ
МОЖНО ПРИОБРЕСТИ
ПО АДРЕСУ:

г. Волгоград, п/о 79, а/я 250,
ИЗДАТЕЛЬСТВО "УЧИТЕЛЬ"

Серия

ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ

Основы информатики
Обучение сочинениям
Сочинения в газетных жанрах
Речевые ошибки
и их предупреждение
Контрольные работы
по физике и астрономии
Пособие для подготовки
олимпиадам по физике в 9 - 11
кл.
Химия для 8 - 11 класса
(тематическое планирование)
Химия для 11 класса
(поурочные планы)
Основы государства
и права России
Алгебра для 10 класса
(поурочные планы)
Геометрия для 10 класса
(поурочные планы)
Геометрия для 11 класса
(поурочные планы)
Литература 5 - 11 класса
(тематическое планирование)