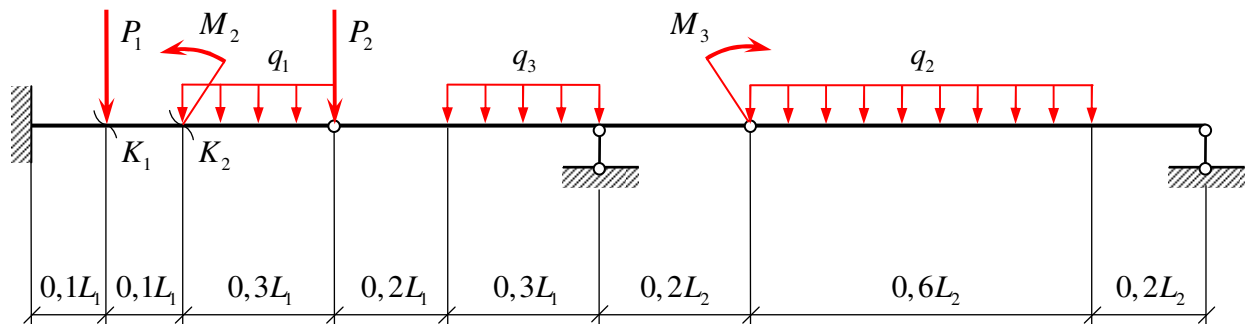


## Расчёт статически определимой многопролётной балки на неподвижную и подвижную нагрузки

### Исходные данные:

расстояния между опорами	$L_1 = 5,2 \text{ м}$
	$L_2 = 6,2 \text{ м}$
	$L_3 = 7,6 \text{ м}$
	$L_4 = 4,5 \text{ м}$
сосредоточенные силы	$P_1 = 4 \text{ кН}$
	$P_2 = 6 \text{ кН}$
	$P_3 = 0 \text{ кН}$
распределённые нагрузки	$q_1 = 3,6 \text{ кН/м}$
	$q_2 = 6,2 \text{ кН/м}$
	$q_3 = 8,6 \text{ кН/м}$
моменты, приложенные к балке	$M_1 = 0 \text{ кНм}$
	$M_2 = 22 \text{ кНм}$
	$M_3 = 20 \text{ кНм}$
рассматриваемые сечения	$K_1$ и $K_2$



### 1. Проверка статической определимости и геометрической неизменяемости составной многопролётной балки.

Необходимое условие: число степеней свободы  $W \leq 0$

$$W = 3D - 2Ш - C - C_0 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 0 - 6 = 0$$

где  $D$  – число дисков в системе (без учёта диска «земля»);

$Ш$  – простых шарниров, соединяющих диски  $D$ ;

$C$  – число стержней, соединяющих диски  $D$ ;

$C_0$  – число опорных стержней, соединяющих систему с диском «земля».

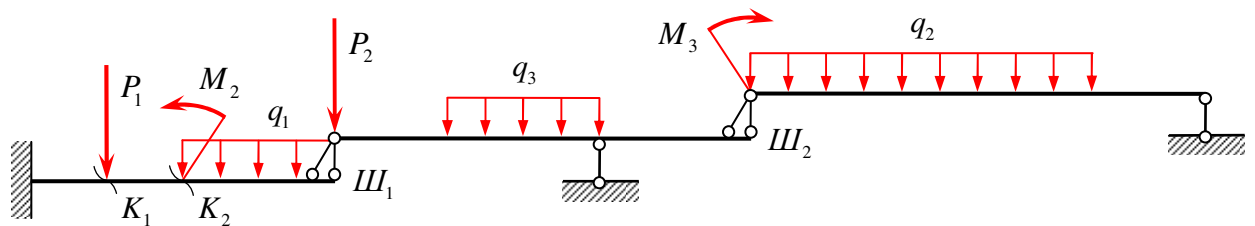
Достаточное условие: диск 1 присоединяется к «земле» тремя связями, образующими жёсткое защемление. Следовательно, эта балка – основная. К этой геометрически

неизменяемой системе присоединён диск 2 по правилу двух дисков (шарнир, соединяющий диски 1 и 2 и опорный стержень 2-го диска, не проходящий через шарнир). К этой геометрически неизменяемой системе присоединён диск 3 по правилу двух дисков (шарнир, соединяющий диски 2 и 3 и опорный стержень 3-го диска, не проходящий через шарнир).

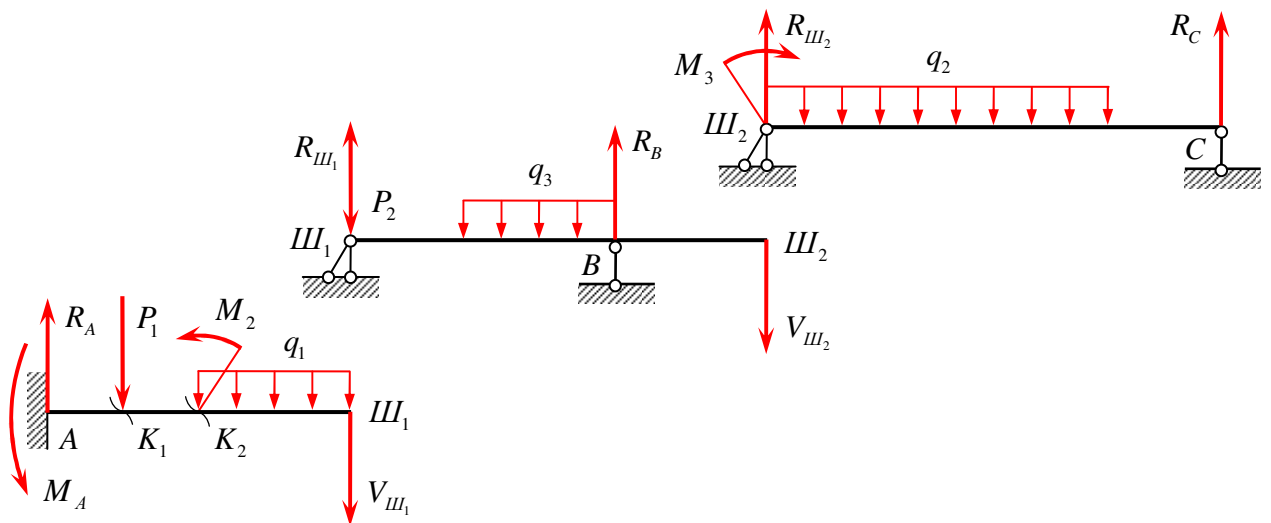
Достаточное условие выполняется.

Вывод: система в целом геометрически неизменяема и статически определима  
 $W = 0$ .

## 2. Построение поэтажной схемы.



## 3. Определение опорных реакций и реакций шарниров.



Элемент  $Ш_2$ :

$$\sum M_C = R_{Ш_2} \cdot 0,8L_2 - q_2 \cdot 0,6L_2 \cdot 0,5L_2 + M_3 = 0$$

$$\sum M_{Ш_2} = R_C \cdot 0,8L_2 - q_2 \cdot 0,6L_2 \cdot 0,3L_2 - M_3 = 0$$

$$R_C = \frac{0,18q_2L_2^2 + M_3}{0,8L_2} = \frac{0,18 \cdot 6,2 \cdot 6,2^2 + 20}{0,8 \cdot 6,2} = 12,68 \text{ кН}$$

$$R_{Ш_2} = \frac{0,3q_2L_2^2 - M_3}{0,8L_2} = \frac{0,3 \cdot 6,2 \cdot 6,2^2 - 20}{0,8 \cdot 6,2} = 10,38 \text{ кН}$$

Проверка:

$$\sum F_{iy} = R_C + R_{III_2} - q_2 \cdot 0,6L_2 = 12,68 + 10,38 - 6,2 \cdot 3,72 = 0$$

Элемент  $III_1III_2$  :

$$\sum M_{III_1} = R_B \cdot 0,5L_1 - V_{III_2} (0,5L_1 + 0,2L_2) - q_3 \cdot 0,3L_1 \cdot 0,35L_1 = 0$$

$$\sum M_B = R_{III_1} \cdot 0,5L_1 - 0,5P_2L_1 + 0,2V_{III_2}L_2 - q_3 \cdot 0,3L_1 \cdot 0,15L_1 = 0$$

$$R_B = \frac{V_{III_2} (0,5L_1 + 0,2L_2) + 0,105q_3L_1^2}{0,5L_1} = \frac{10,38(2,6 + 1,24) + 0,105 \cdot 8,6 \cdot 5,2^2}{2,6} = 24,72 \text{ кН}$$

$$R_{III_1} = \frac{0,5P_2L_1 - 0,2V_{III_2}L_2 + 0,045q_3L_1^2}{0,5L_1} = \frac{0,5 \cdot 6 \cdot 5,2 - 0,2 \cdot 10,38 \cdot 6,2 + 0,045 \cdot 8,6 \cdot 5,2^2}{2,6} = 5,08 \text{ кН}$$

Проверка:

$$\sum F_{iy} = R_B + R_{III_1} - P_2 - V_{III_2} - q_3 \cdot 0,3L_1 = 24,72 + 5,08 - 6 - 10,38 - 8,6 \cdot 1,56 = 0$$

Элемент  $AIII_1$  :

$$\sum M_A = M_A - 0,1P_1L_1 - 0,5V_{III_1}L_1 - q_1 \cdot 0,3L_1 \cdot 0,35L_1 + M_2 = 0$$

$$\sum M_{III_1} = R_A \cdot 0,5L_1 - 0,4P_1L_1 - q_1 \cdot 0,3L_1 \cdot 0,15L_1 - M_A - M_2 = 0$$

$$M_A = 0,1P_1L_1 + 0,5V_{III_1}L_1 + 0,105q_1L_1^2 - M_2 =$$

$$= 4 \cdot 0,52 + 5,08 \cdot 2,6 + 0,105 \cdot 3,6 \cdot 5,2^2 - 22 = 3,51 \text{ кНм}$$

$$R_A = \frac{0,4P_1L_1 + 0,045q_1L_1^2 + M_A + M_2}{0,5L_1} =$$

$$= \frac{4 \cdot 2,08 + 0,045 \cdot 3,6 \cdot 5,2^2 + 3,51 + 22}{0,5 \cdot 5,2} = 14,7 \text{ кН}$$

Проверка:

$$\sum F_{iy} = R_A - V_{III_1} - P_1 - q_1 \cdot 0,3L_1 = 14,7 - 5,08 - 4 - 3,6 \cdot 1,56 = 0$$

#### 4. Построение эпюр $Q$ и $M$ для всех простых и консольных балок поэтажной схемы.

Элемент  $AIII_1$  :

$$0 \leq z_1 \leq 0,52 \text{ м} \quad Q_1 = R_A = 14,7 \text{ кН}$$

$$M_1 = R_A z_1 - M_A = 14,7 z_1 - 3,51$$

$$M_1(0) = -3,51 \text{ кНм}$$

$$M_1(0,52) = 14,7 \cdot 0,52 - 3,51 = 4,13 \text{ кНм}$$

$$0 \leq z_2 \leq 0,52 \text{ м} \quad Q_2 = R_A - P_1 = 10,7 \text{ кН}$$

$$M_2 = R_A (0,52 + z_2) - P_1 z_2 - M_A = 10,7 z_2 + 4,13$$

$$M_2(0) = 4,13 \text{ кНм}$$

$$M_2(0,52) = 10,7 \cdot 0,52 + 4,13 = 9,69 \text{ кНм}$$

$$0 \leq z_3 \leq 1,56 \text{ м} \quad Q_3 = V_{III_1} + q_1 z_3 = 5,08 + 3,6 z_3$$

$$Q_3(0) = 5,08 \text{ кН}$$

$$Q_3(1,56) = 5,08 + 3,6 \cdot 1,56 = 10,7 \text{ кН}$$

$$M_3 = -V_{III_1} z_3 - 0,5 q_1 z_3^2 = -5,08 z_3 - 1,8 z_3^2$$

$$M_2(0) = 0 \text{ кНм}$$

$$M_2(1,56) = -5,08 \cdot 1,56 - 1,8 \cdot 1,56^2 = -12,31 \text{ кНм}$$

Элемент III<sub>1</sub>III<sub>2</sub>:

$$0 \leq z_1 \leq 1,04 \text{ м} \quad Q_1 = R_{III_1} - P_2 = -0,92 \text{ кН}$$

$$M_1 = (R_{III_1} - P_2) z_1 = -0,92 z_1$$

$$M_1(0) = 0 \text{ кНм}$$

$$M_1(1,04) = -0,92 \cdot 1,04 = -0,96 \text{ кНм}$$

$$0 \leq z_2 \leq 1,56 \text{ м} \quad Q_2 = R_{III_1} - P_2 - q_3 z_2 = -0,92 - 8,6 z_2$$

$$Q_2(0) = -0,92 \text{ кН}$$

$$Q_2(1,56) = -0,92 - 8,6 \cdot 1,56 = -14,34 \text{ кН}$$

$$M_2 = (R_{III_1} - P_2)(1,04 + z_2) - 0,5 q_3 z_2^2 = -0,96 - 0,92 z_2 - 4,3 z_2^2$$

$$M_2(0) = -0,96 \text{ кНм}$$

$$M_2(1,56) = -0,96 - 0,92 \cdot 1,56 - 4,3 \cdot 1,56^2 = -12,87 \text{ кНм}$$

$$0 \leq z_3 \leq 1,24 \text{ м} \quad Q_3 = V_{III_2} = 10,38 \text{ кН}$$

$$M_3 = -V_{III_2} z_3 = -10,38 z_3$$

$$M_3(0) = 0 \text{ кНм}$$

$$M_3(1,24) = -10,38 \cdot 1,24 = -12,87 \text{ кНм}$$

Элемент CIII<sub>2</sub>:

$$0 \leq z_1 \leq 3,72 \text{ м} \quad Q_1 = R_{III_2} - q_2 z_1 = 10,38 - 6,2 z_1$$

$$Q_1(0) = 10,38 \text{ кН}$$

$$Q_1(3,72) = 10,38 - 6,2 \cdot 3,72 = -12,68 \text{ кН}$$

$$M_1 = R_{III_2} z_1 - 0,5 q_2 z_1^2 + M_3 = 20 + 10,38 z_1 - 3,1 z_1^2$$

$$M_1(0) = 20 \text{ кНм}$$

$$M_1(3,72) = 20 + 10,38 \cdot 3,72 - 3,1 \cdot 3,72^2 = 15,72 \text{ кНм}$$

Определяем  $z'_1$ , где  $Q_1 = 0$ :  $z'_1 = \frac{R_{III_2}}{q_2} = \frac{10,38}{6,2} = 1,674 \text{ м}$

$$M_1(1,674) = 20 + 10,38 \cdot 1,674 - 3,1 \cdot 1,674^2 = 28,7 \text{ кНм}$$

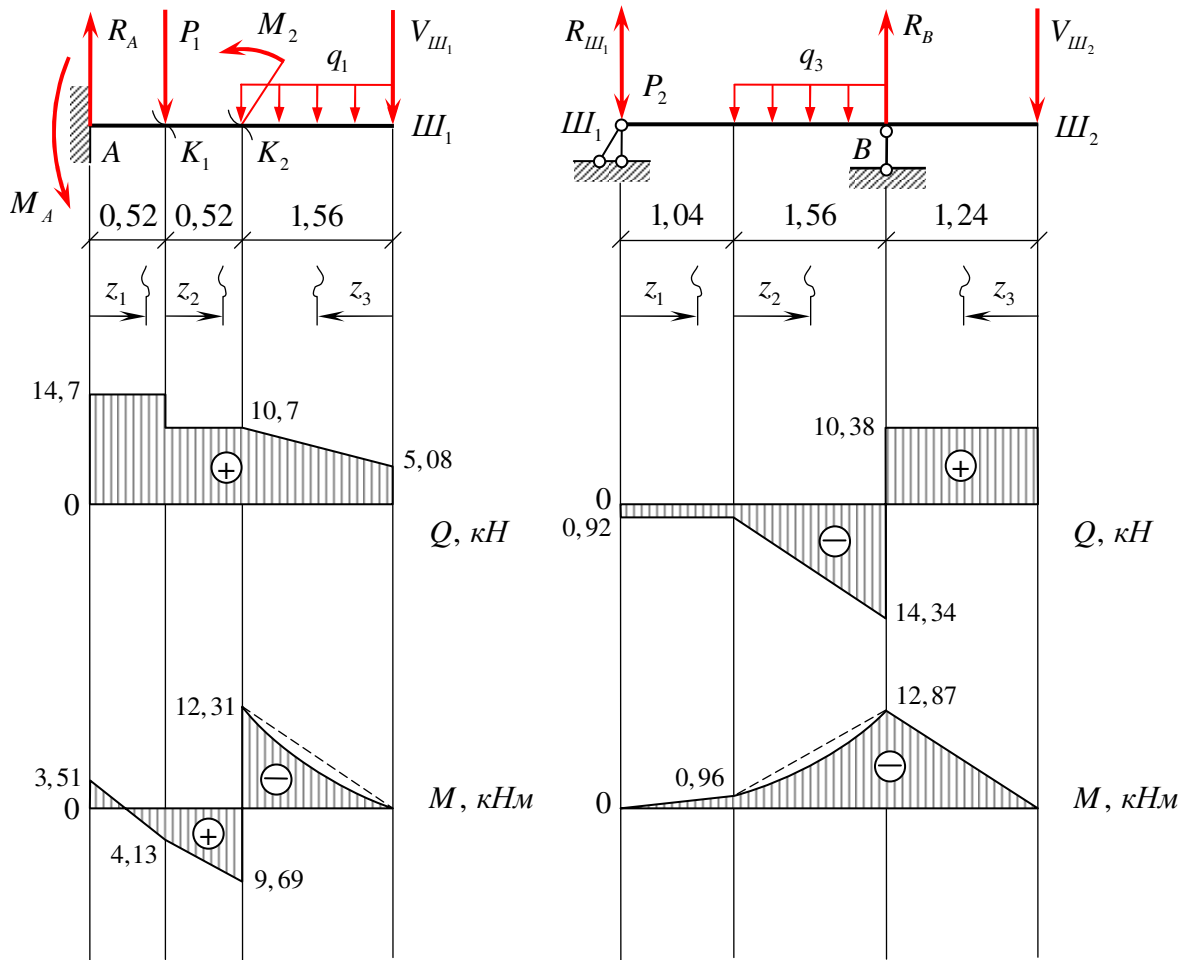
$$0 \leq z_2 \leq 1,24 \text{ м}$$

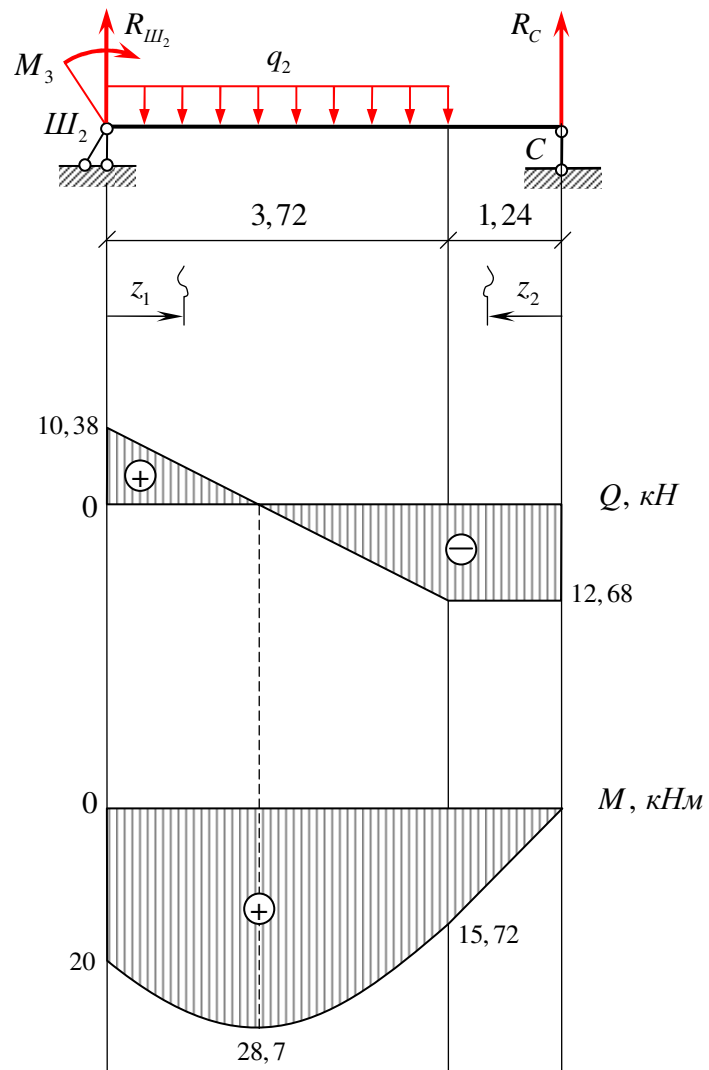
$$Q_2 = -R_C = -12,68 \text{ кН}$$

$$M_2 = R_C z_2 = 12,68 z_2$$

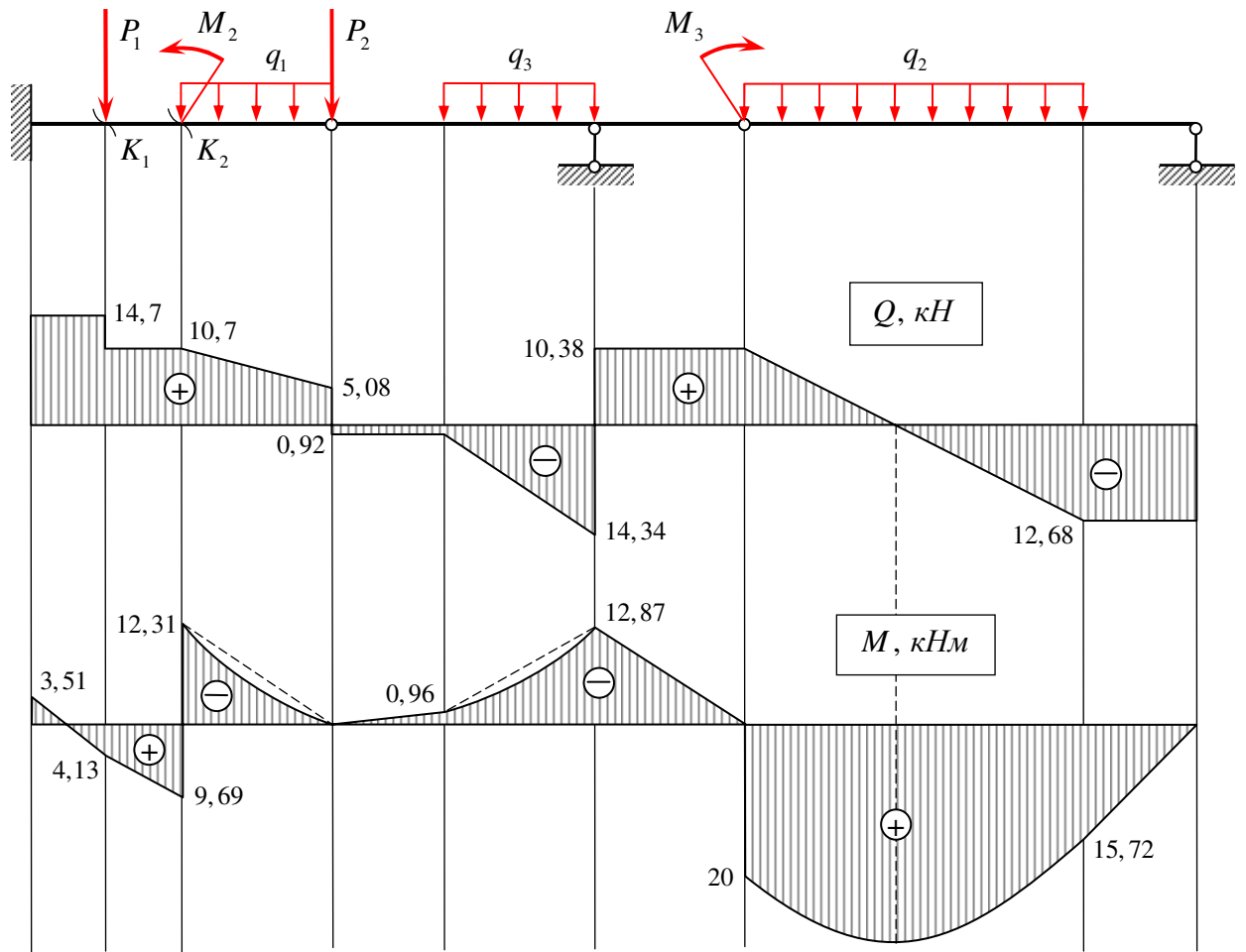
$$M_2(0) = 0 \text{ кНм}$$

$$M_2(1,24) = 12,68 \cdot 1,24 = 15,72 \text{ кНм}$$





## 5. Построение эпюр $Q$ и $M$ для заданной составной балки.



## 6. Построение линии влияния одной из опорных реакций промежуточной опоры.

Определение реакций опор и внутренних силовых факторов по линиям влияния выполняется по формуле

$$S = \sum_i P_i y_i + \sum_j q_j \omega_j + \sum_k M_k \operatorname{tg} \alpha_k$$

где  $S$  – искомая величина;

$P$  – внешняя сила («+» – направлена вниз, «-» – направлена вверх);

$q$  – распределённая нагрузка («+» – направлена вниз, «-» – направлена вверх);

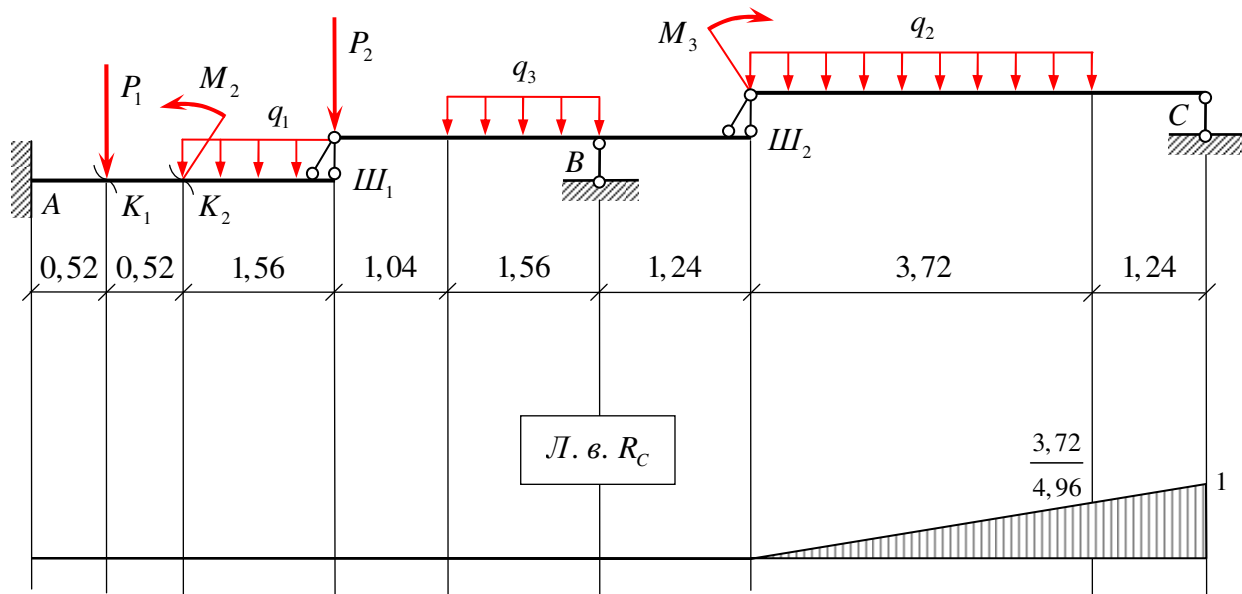
$M$  – изгибающий момент («+» – направлен по часовой стрелке, «-» – направлен против часовой стрелки);

$y$  – ординаты линии влияния в сечении балки под соответствующей силой;

$\omega$  – площадь участка линии влияния под распределённой нагрузкой;

$\alpha$  – угол наклона линии влияния под изгибающим моментом.

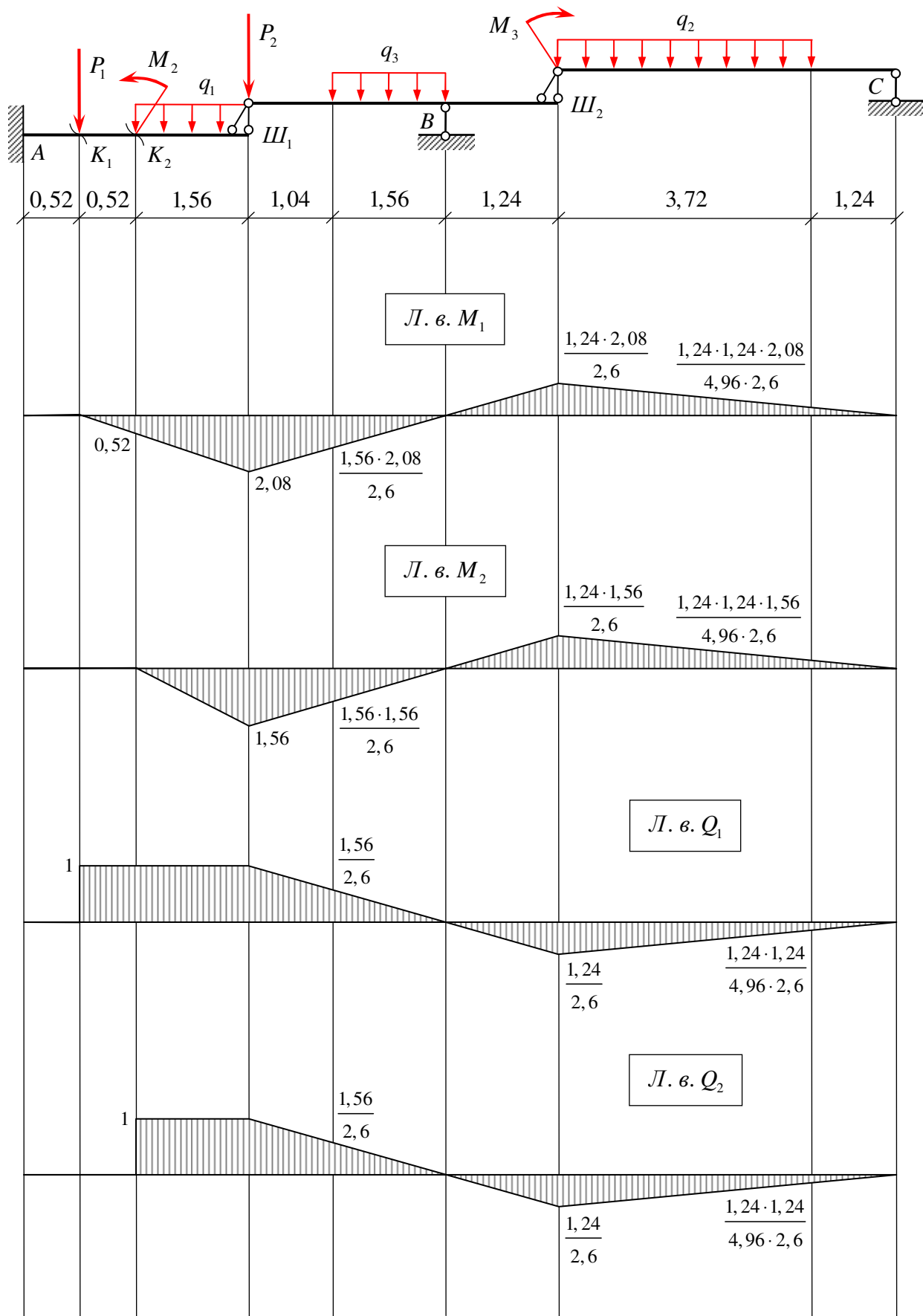
Построим линию влияния для опорной реакции  $R_C$  и с помощью неё определим величину этой реакции.



$$R_C = 6,2 \left( \frac{1}{2} \cdot 3,72 \cdot \frac{3,72}{4,96} \right) + 20 \cdot \frac{1}{4,96} = 12,68 \text{ кН}$$

**7. Построение линий влияния поперечных сил и изгибающих моментов для сечений  $K_1$  и  $K_3$ .**





$$M_1 = -6 \cdot 2,08 - 3,6 \left( 1,56 \cdot \frac{0,52 + 2,08}{2} \right) + 6,2 \left( 3,72 \cdot \frac{1,24 \cdot 2,08 \cdot 4,96 + 1,24 \cdot 1,24 \cdot 2,08}{2 \cdot 4,96 \cdot 2,6} \right) -$$

$$- 8,6 \left( \frac{1}{2} \cdot 1,56 \cdot \frac{1,56 \cdot 2,08}{2,6} \right) + 22 \cdot \frac{2,08}{2,08} - 20 \cdot \frac{1,24 \cdot 2,08}{2,6 \cdot 4,96} = 4,147 \text{ } \kappa H M$$

$$M_2^{neg} = -6 \cdot 1,56 - 3,6 \left( \frac{1}{2} \cdot 1,56 \cdot 1,56 \right) + 6,2 \left( 3,72 \cdot \frac{1,24 \cdot 1,56 \cdot 4,96 + 1,24 \cdot 1,24 \cdot 1,56}{2 \cdot 4,96 \cdot 2,6} \right) -$$

$$- 8,6 \left( \frac{1}{2} \cdot 1,56 \cdot \frac{1,56 \cdot 1,56}{2,6} \right) + 22 \cdot \frac{1,56}{1,56} - 20 \cdot \frac{1,24 \cdot 1,56}{2,6 \cdot 4,96} = 9,706 \text{ } \kappa H M$$

$$M_2^{npas} = -6 \cdot 1,56 - 3,6 \left( \frac{1}{2} \cdot 1,56 \cdot 1,56 \right) + 6,2 \left( 3,72 \cdot \frac{1,24 \cdot 1,56 \cdot 4,96 + 1,24 \cdot 1,24 \cdot 1,56}{2 \cdot 4,96 \cdot 2,6} \right) -$$

$$- 8,6 \left( \frac{1}{2} \cdot 1,56 \cdot \frac{1,56 \cdot 1,56}{2,6} \right) - 20 \cdot \frac{1,24 \cdot 1,56}{2,6 \cdot 4,96} = -12,294 \text{ } \kappa H M$$

$$Q_1^{neg} = 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 3,6(1,56 \cdot 1) - 6,2 \left( 3,72 \cdot \frac{1,24 \cdot 4,96 + 1,24 \cdot 1,24}{2 \cdot 4,96 \cdot 2,6} \right) +$$

$$+ 8,6 \left( \frac{1}{2} \cdot 1,56 \cdot \frac{1,56}{2,6} \right) - 22 \cdot 0 + 20 \cdot \frac{1,24}{2,6 \cdot 4,96} = 14,689 \text{ } \kappa H M$$

$$Q_1^{npas} = 6 \cdot 1 + 3,6(1,56 \cdot 1) - 6,2 \left( 3,72 \cdot \frac{1,24 \cdot 4,96 + 1,24 \cdot 1,24}{2 \cdot 4,96 \cdot 2,6} \right) +$$

$$+ 8,6 \left( \frac{1}{2} \cdot 1,56 \cdot \frac{1,56}{2,6} \right) - 22 \cdot 0 + 20 \cdot \frac{1,24}{2,6 \cdot 4,96} = 10,689 \text{ } \kappa H M$$

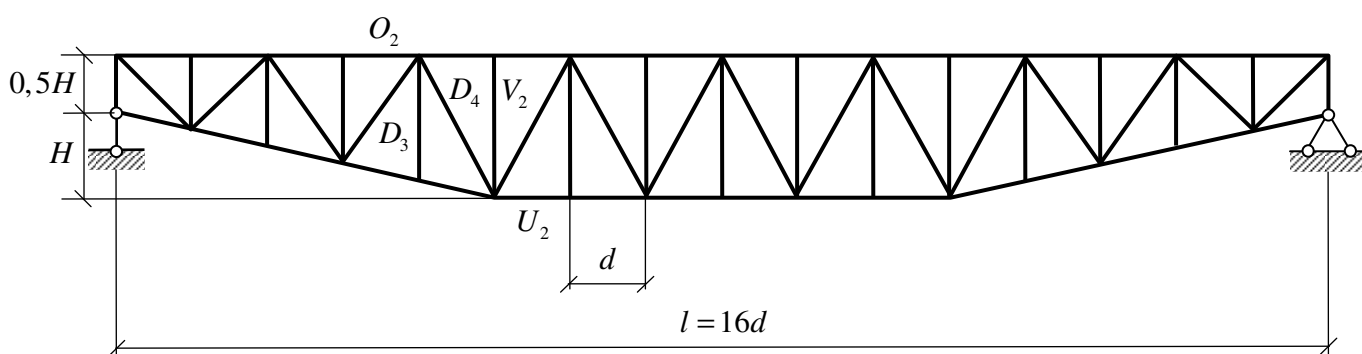
$$Q_2 = 6 \cdot 1 + 3,6(1,56 \cdot 1) - 6,2 \left( 3,72 \cdot \frac{1,24 \cdot 4,96 + 1,24 \cdot 1,24}{2 \cdot 4,96 \cdot 2,6} \right) +$$

$$+ 8,6 \left( \frac{1}{2} \cdot 1,56 \cdot \frac{1,56}{2,6} \right) - 22 \cdot 0 + 20 \cdot \frac{1,24}{2,6 \cdot 4,96} = 10,689 \text{ } \kappa H M$$

## Расчёт ферм на постоянную нагрузку

### Исходные данные:

распределённая нагрузка (собственный вес фермы)	$q = 4,5 \text{ кН/м}$
расстояния между стойками	$d = 5,0 \text{ м}$
высота	$H = 1,2d = 6 \text{ м}$
рассчитываемые элементы	$U_2, O_2, D_3, D_4, V_2$



### 1. Проверка статической определимости и геометрической неизменяемости фермы.

Необходимое условие: число степеней свободы  $W \leq 0$

$$W = 2U - C - C_0 = 2 \cdot 34 - 65 - 3 = 0$$

где  $U$  – число узлов в системе;

$C$  – число стержней, соединяющих узлы  $U$ ;

$C_0$  – число опорных стержней, соединяющих систему с диском «земля».

Достаточное условие: структура фермы соответствует последовательному соединению трёх дисков тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой (правило треугольника). К земле ферма крепится тремя опорными стержнями (два в опоре  $A$  и один в опоре  $B$ ), оси которых не параллельны и не пересекаются в одной точке (правило двух дисков). Следовательно, достаточное условие выполняется.

Вывод: система в целом геометрически неизменяема и статически определима  $W = 0$ .

### 2. Опорные реакции фермы, нагруженной неподвижной нагрузкой.

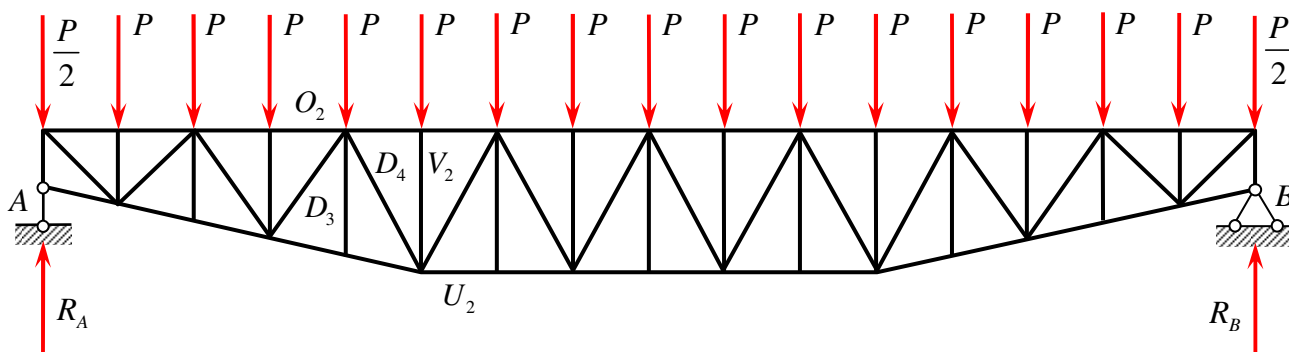
Учитывая симметрию фермы и постоянное по её длине значение постоянной нагрузки  $q$ , путём замены собственного веса узловыми нагрузками, имеем

$$P = qd = 4,5 \cdot 5 = 22,5 \text{ кН}$$

$$R_A = R_B = q \frac{l}{2} = q \frac{16d}{2} = 8P = 180 \text{ кН}$$

а с учётом вида опор и нагружения

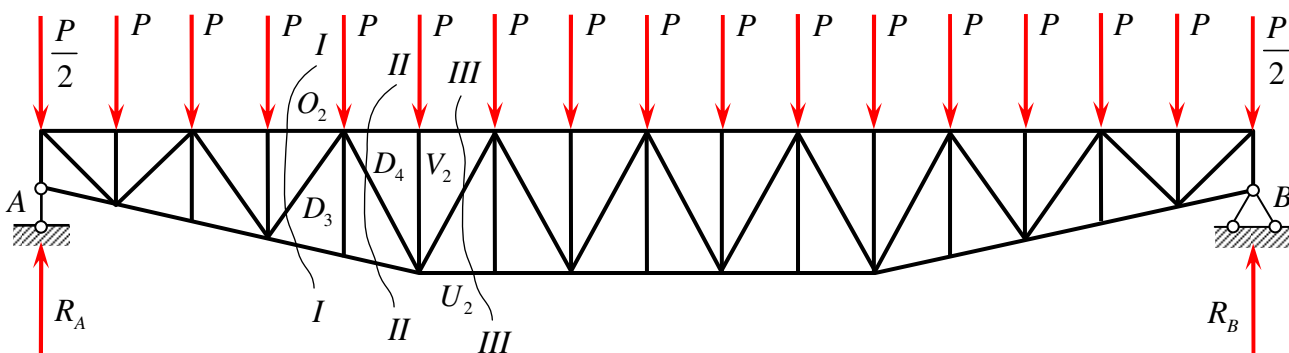
$$H_B = 0 \text{ кН}$$

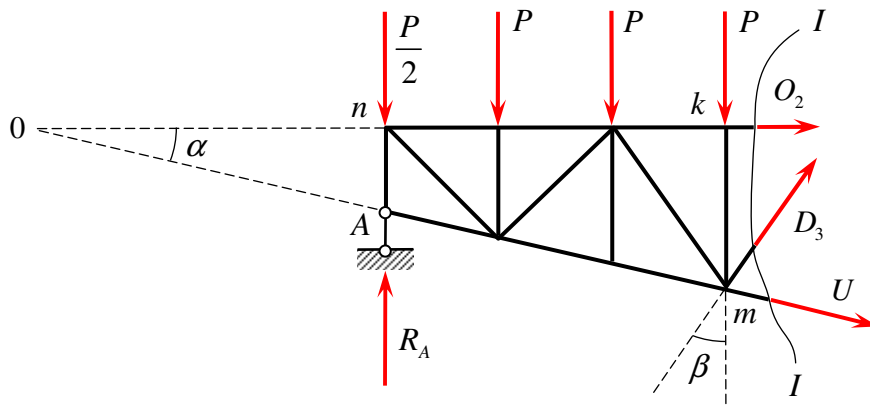


### 3. Усилия в заданных стержнях фермы, нагруженной неподвижной нагрузкой.

Усилия в элементах верхнего пояса фермы принято обозначать буквой  $O$ , усилия в элементах нижнего пояса – буквой  $U$ , усилия в раскосах – буквой  $D$ , усилия в стойках – буквой  $V$ . У этих букв внизу будем ставить цифры, соответствующие узлам фермы, к которым присоединён данный стержень.

Для определения усилий в стержнях  $O_2$  и  $D_3$  воспользуемся способом моментной точки. Для этого проводим сечение  $I-I$  и рассматриваем равновесие левой части фермы.





Определим численные значения некоторых величин, необходимые в последующих расчётах.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{5d} = \frac{6}{5 \cdot 5} = 0,24; \quad \alpha = \operatorname{arctg} 0,24 = 13,5^\circ$$

$$\sin \alpha = \sin 13,5^\circ = 0,233; \quad \cos \alpha = \cos 13,5^\circ = 0,972$$

$$0n = \frac{0,5H}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{3}{0,24} = 12,5 \text{ м}; \quad mk = 0k \cdot \operatorname{tg} \alpha = (12,5 + 15) \cdot 0,24 = 6,6 \text{ м}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{d}{mk} = \frac{5}{6,6} = 0,757; \quad \beta = \operatorname{arctg} 0,757 = 37,15^\circ$$

$$\sin \beta = \sin 37,15^\circ = 0,604; \quad \cos \beta = \cos 37,15^\circ = 0,797$$

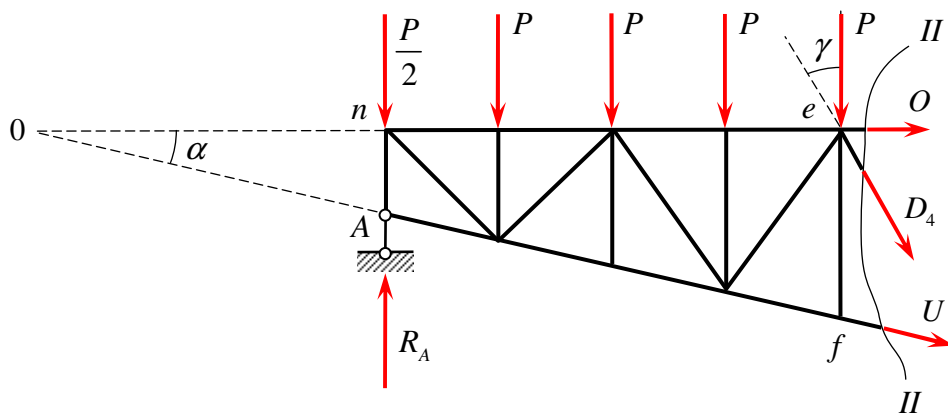
Усилие в стержне  $O_2$ :

$$\begin{aligned} \sum M_m = O_2 \cdot mk - P(d + 2d + 0,5d) + R_A \cdot 3d = 0 \\ O_2 = \frac{3,5Pd - 3R_A d}{mk} = \frac{3,5 \cdot 22,5 \cdot 5 - 3 \cdot 180 \cdot 5}{6,6} = -349,4 \text{ кН} \end{aligned}$$

Усилие в стержне  $D_3$ :

$$\begin{aligned} \sum M_0 = D_3(0k \cos \beta + mk \sin \beta) - P(3,5 \cdot 0n + 3d + 2d + d) + R_A \cdot 0n = 0 \\ D_3 = \frac{P(3,5 \cdot 0n + 6d) - R_A \cdot 0n}{0k \cos \beta + mk \sin \beta} = \frac{22,5(3,5 \cdot 12,5 + 30) - 180 \cdot 12,5}{(12,5 + 15) \cdot 0,797 + 6,6 \cdot 0,604} = -22,8 \text{ кН} \end{aligned}$$

Для определения усилия в стержне  $D_4$  проводим сечение II-II и рассматриваем равновесие левой части фермы.



Определим численные значения некоторых величин, необходимые в последующих расчётах.

$$ef = 0e \cdot \operatorname{tg} \alpha = (12,5 + 20) \cdot 0,24 = 7,8 \text{ м}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{d}{ef} = \frac{5}{7,8} = 0,641; \quad \gamma = \operatorname{arctg} 0,641 = 32,66^\circ$$

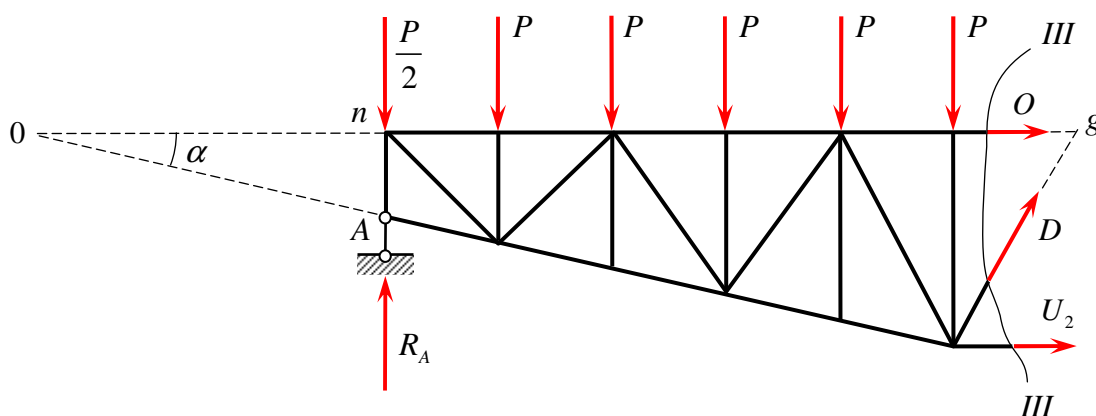
$$\sin \gamma = \sin 32,66^\circ = 0,540; \quad \cos \gamma = \cos 32,66^\circ = 0,842$$

Усилие в стержне  $D_4$  :

$$\sum M_0 = D_4 \cdot 0e \cos \gamma - R_A \cdot 0n + P(4,5 \cdot 0n + 4d + 3d + 2d + d) = 0$$

$$D_4 = \frac{R_A \cdot 0n - P(4,5 \cdot 0n + 10d)}{0e \cos \gamma} = \frac{180 \cdot 12,5 - 22,5(4,5 \cdot 12,5 + 50)}{(12,5 + 20) \cdot 0,842} = -5,14 \text{ кН}$$

Для определения усилия в стержне  $U_2$  проводим сечение III – III и рассматриваем равновесие левой части фермы.

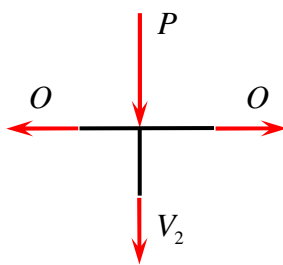


Усилие в стержне  $U_2$  :

$$\sum M_g = U_2 \cdot 1,5H - R_A \cdot 6d + P(0,5 \cdot 6d + 5d + 4d + 3d + 2d + d) = 0$$

$$U_2 = \frac{6R_A d - 18Pd}{1,5H} = \frac{6 \cdot 180 \cdot 5 - 18 \cdot 22,5 \cdot 5}{1,5 \cdot 6} = 375 \text{ кН}$$

Для определения усилия в стержне  $V_2$  воспользуемся способом вырезания узлов.



Усилие в стержне  $V_2$ :

$$\sum F_y = -V_2 - P = 0$$
$$V_2 = -P = -22,5 \text{ кН}$$

## Расчёт статически определимых арок и рам

### Исходные данные:

форма оси арки – параболическая

уравнение оси арки

$$y = \frac{4f}{l^2} z(l-z)$$

геометрические параметры

$$\operatorname{tg} \alpha = y' = \frac{4f}{l^2} (l-2z)$$

длина пролёта арки

$$l = 18 \text{ м}$$

стрела подъёма арки

$$f = 0,3l = 5,4 \text{ м}$$

распределённая нагрузка

$$q = 6,0 \text{ кН/м}$$

сосредоточенная сила

$$P = \beta ql = 1,4 \cdot 6 \cdot 18 = 151,2 \text{ кН}$$

положение сосредоточенной силы

$$z_p = u_1 l = 0,5 \cdot 18 = 9 \text{ м}$$

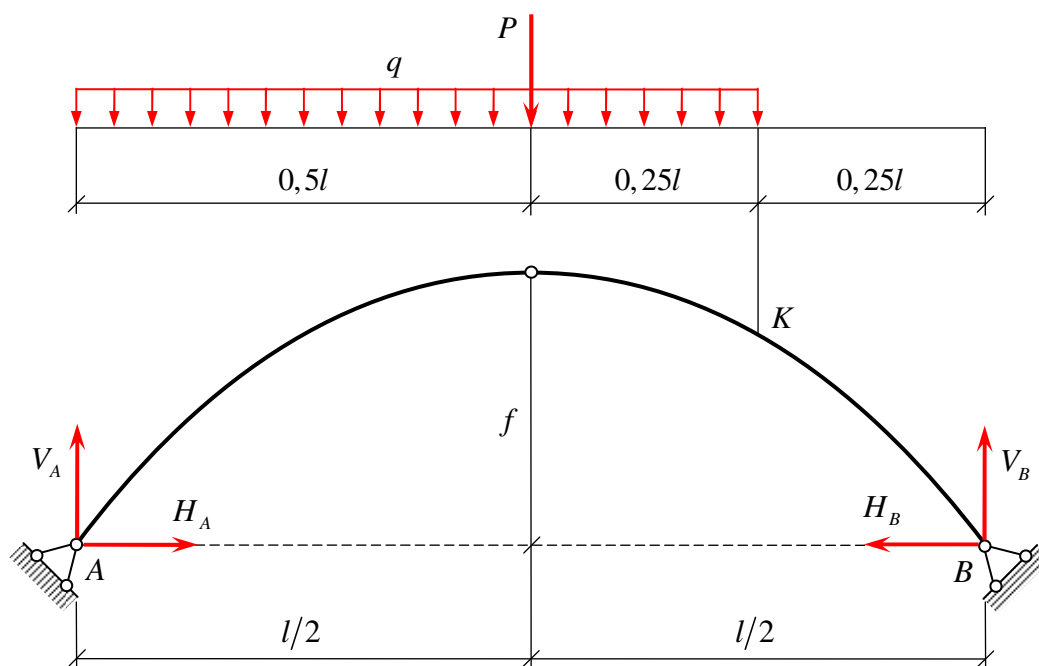
положение распределённой нагрузки

$$z_{qn} = u_2 l = 0 \cdot 18 = 0 \text{ м}$$

$$z_{qk} = u_3 l = 0,75 \cdot 18 = 13,5 \text{ м}$$

положение сечения  $K - K$

$$z_K = 0,75L = 13,5 \text{ м}$$





## 1. Проверка статической определимости и геометрической неизменяемости системы.

Необходимое условие: число степеней свободы  $W \leq 0$

$$W = 3D - 2Ш - C - C_0 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 0 - 4 = 0$$

где  $D$  – число дисков в системе (без учёта диска «земля»);

$Ш$  – простых шарниров, соединяющих диски  $D$ ;

$C$  – число стержней, соединяющих диски  $D$ ;

$C_0$  – число опорных стержней, соединяющих систему с диском «земля».

Достаточное условие: три диска соединены тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой (правило треугольника). Достаточное условие выполняется.

Вывод: система в целом геометрически неизменяема и статически определима  $W = 0$ .

## 2. Определяем опорные реакции арки и распора.

Для определения вертикальных опорных реакций  $V_A, V_B$  и горизонтальных опорных реакций (распора)  $H_A, H_B$  составляем уравнения равновесия

$$\sum M_B = V_A l - 0,5Pl - q \cdot 0,75l \cdot 0,625l = 0$$

$$\sum M_A = V_B l - 0,5Pl - q \cdot 0,75l \cdot 0,375l = 0$$

$$\sum M_C^{лев} = V_A \cdot 0,5l - H_A f - q \cdot 0,5l \cdot 0,25l = 0$$

$$\sum F_{ix} = H_A - H_B = 0$$

Решая полученные уравнения, находим

$$V_A = \frac{0,5Pl + 0,65625ql^2}{l} = \frac{0,5 \cdot 151,2 \cdot 18 + 0,46875 \cdot 6 \cdot 18^2}{18} = 126,225 \text{ кН}$$

$$V_B = \frac{0,5Pl + 0,28125ql^2}{l} = \frac{0,5 \cdot 151,2 \cdot 18 + 0,28125 \cdot 6 \cdot 18^2}{18} = 105,975 \text{ кН}$$

$$H_A = \frac{0,5V_A l - 0,125ql^2}{f} = \frac{0,5 \cdot 146,475 \cdot 18 - 0,125 \cdot 6 \cdot 18^2}{5,4} = 199,125 \text{ кН}$$

$$H_B = H_A = 199,125 \text{ кН}$$

Проверка:

$$F_{iy} = V_A + V_B - P - 0,75ql = 146,475 + 105,975 - 151,2 - 0,75 \cdot 6 \cdot 18 = 0$$

**3. Определение внутренних усилий  $M_K, Q_K, N_K$  возникающих в сечении  $K - K$  от заданных нагрузок  $P$  и  $Q$  аналитически.**

Внутренние усилия  $M_K, Q_K, N_K$  определяем по формулам:

$$\text{Изгибающий момент в арке: } M_K = M_K^0 - H_A y_K$$

$$\text{Поперечная сила в арке: } Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_K - H_A \sin \varphi_K$$

$$\text{Продольная сила в арке: } N_K = Q_K^0 \sin \varphi_K + H_A \cos \varphi_K$$

где  $M_K^0, Q_K^0$  – изгибающий момент и поперечная сила в сечении  $K - K$  двухопорной балки с пролётом, равным пролёту трёхшарнирной арки и нагруженной той же нагрузкой;

$y_K$  – ордината оси трёхшарнирной арки в сечении  $K - K$  ;

$\varphi_K$  – угол наклона касательной к оси трёхшарнирной арки в сечении  $K - K$  .

Определяем вышеперечисленные параметры для заданного сечения  $K - K$  :

$$y_K = \frac{4f}{l^2} z_K (l - z_K) = \frac{4 \cdot 5,4}{18^2} \cdot 13,5 (18 - 13,5) = 4,05 \text{ м}$$

$$\text{tg } \varphi_K = y'_K = \frac{4f}{l^2} (l - 2z_K) = \frac{4 \cdot 5,4}{18^2} (18 - 2 \cdot 13,5) = -0,6$$

$$\sin \varphi_K = -0,5145; \quad \cos \varphi_K = 0,8575$$

$$M_K^0 = V_B \cdot 0,25l = 105,975 \cdot 0,25 \cdot 18 = 476,89 \text{ кНм}$$

$$Q_K^0 = -V_B = -105,975 \text{ кН}$$

Подставляя найденные значения в формулы, получаем величины внутренних усилий в сечении  $K - K$  .

$$M_K = 476,89 - 199,125 \cdot 4,05 = -329,57 \text{ кНм}$$

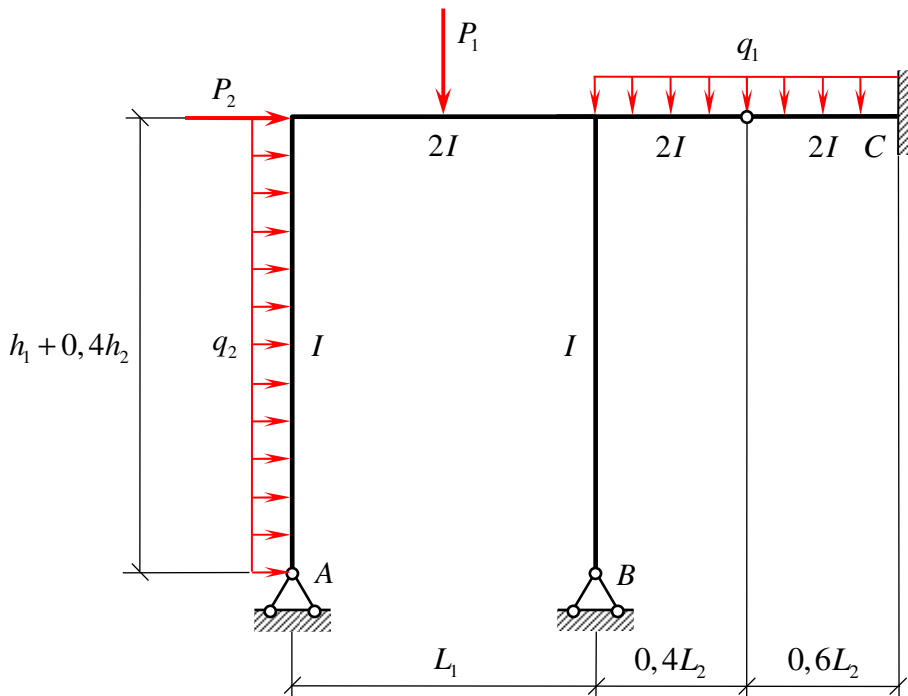
$$Q_K = -105,975 \cdot 0,8575 - 199,125 \cdot (-0,5145) = 11,58 \text{ кН}$$

$$N_K = 105,975 \cdot (-0,5145) + 199,125 \cdot 0,8575 = 116,23 \text{ кН}$$

# Расчёт плоской статически неопределимой рамы методом сил

## Исходные данные:

расстояния между опорами	$L_1 = 3,4 \text{ м}$
	$L_2 = 6,2 \text{ м}$
высоты рамы	$h_1 = 5,4 \text{ м}$
	$h_2 = 4,0 \text{ м}$
сосредоточенные силы	$P_1 = 36 \text{ кН}$
	$P_2 = 18 \text{ кН}$
распределённые нагрузки	$q_1 = 12,8 \text{ кН/м}$
	$q_2 = 6,6 \text{ кН/м}$



## 1. Устанавливаем степень статической неопределимости.

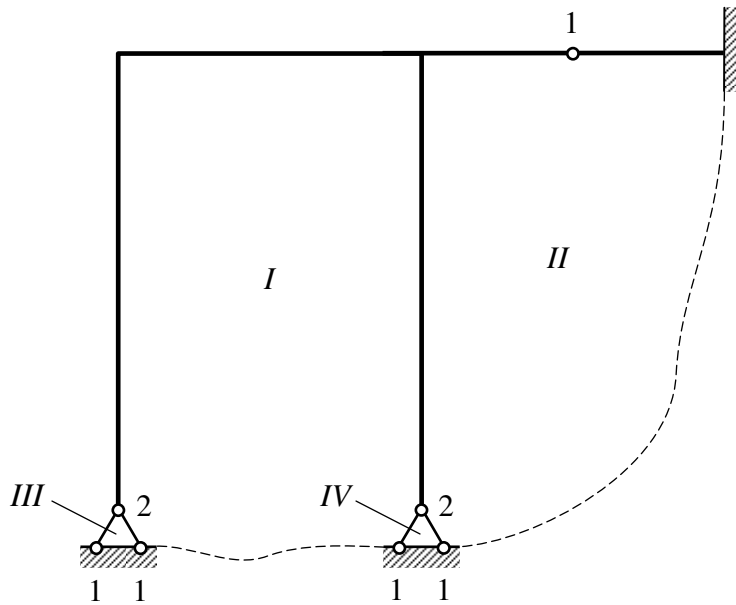
Правило для определения статической неопределимости конструкций со сложным внутренним образованием представляется в виде формулы

$$S = 3n - III$$

где  $S$  – степень статической неопределимости системы;

$n$  – число замкнутых контуров в конструкции в предположении отсутствия шарнирных соединений;

$III$  – число шарниров, причём шарнир, соединяющий два стержня, считается за один (одиночный шарнир), соединяющий три стержня – за два шарнира (двойной шарнир) и т. д.; «земля» при этом рассматривается как стержень, а группа стержней, не разделённых шарнирами, считается за один стержень.

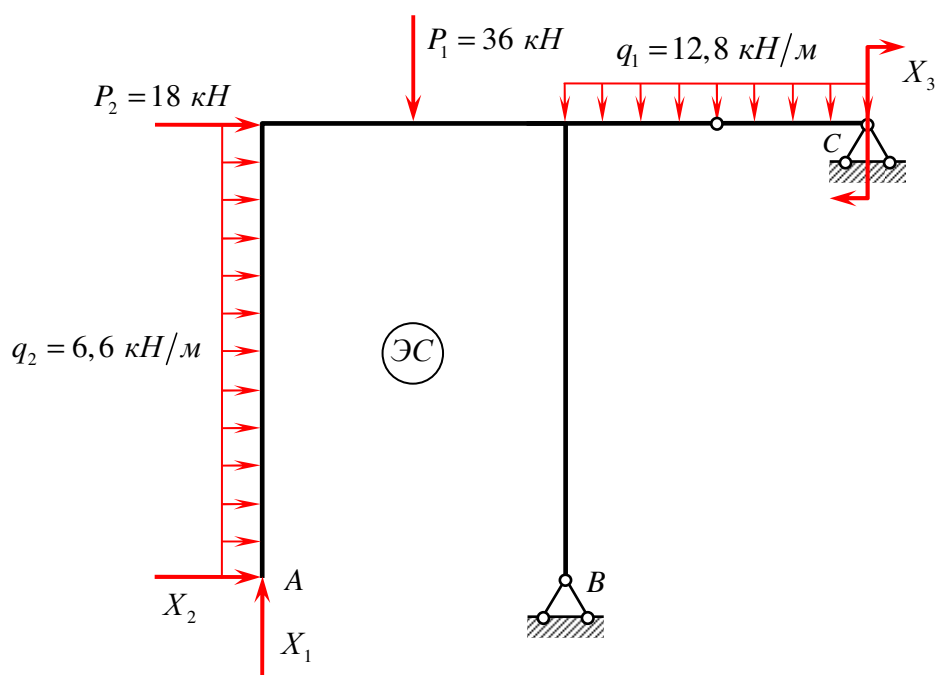


$$n = 4; \quad III = 1+1+1+1+1+2+2 = 9; \quad S = 3 \cdot 4 - 9 = 3$$

то есть конструкция три раза статически неопределима.

## 2. Выбираем основную систему и составляем систему канонических уравнений в общем виде.

В качестве лишних примем связи, наложенные шарнирно-неподвижной опорой  $A$  и связью, препятствующую вращению стержня в заделке  $C$ . Разгрузив раму, и прикладывая все заданные нагрузки и лишние неизвестные  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  (вертикальную и горизонтальную реакции опоры  $A$ , а также реактивный момент в заделке  $C$ ) получим эквивалентную систему.



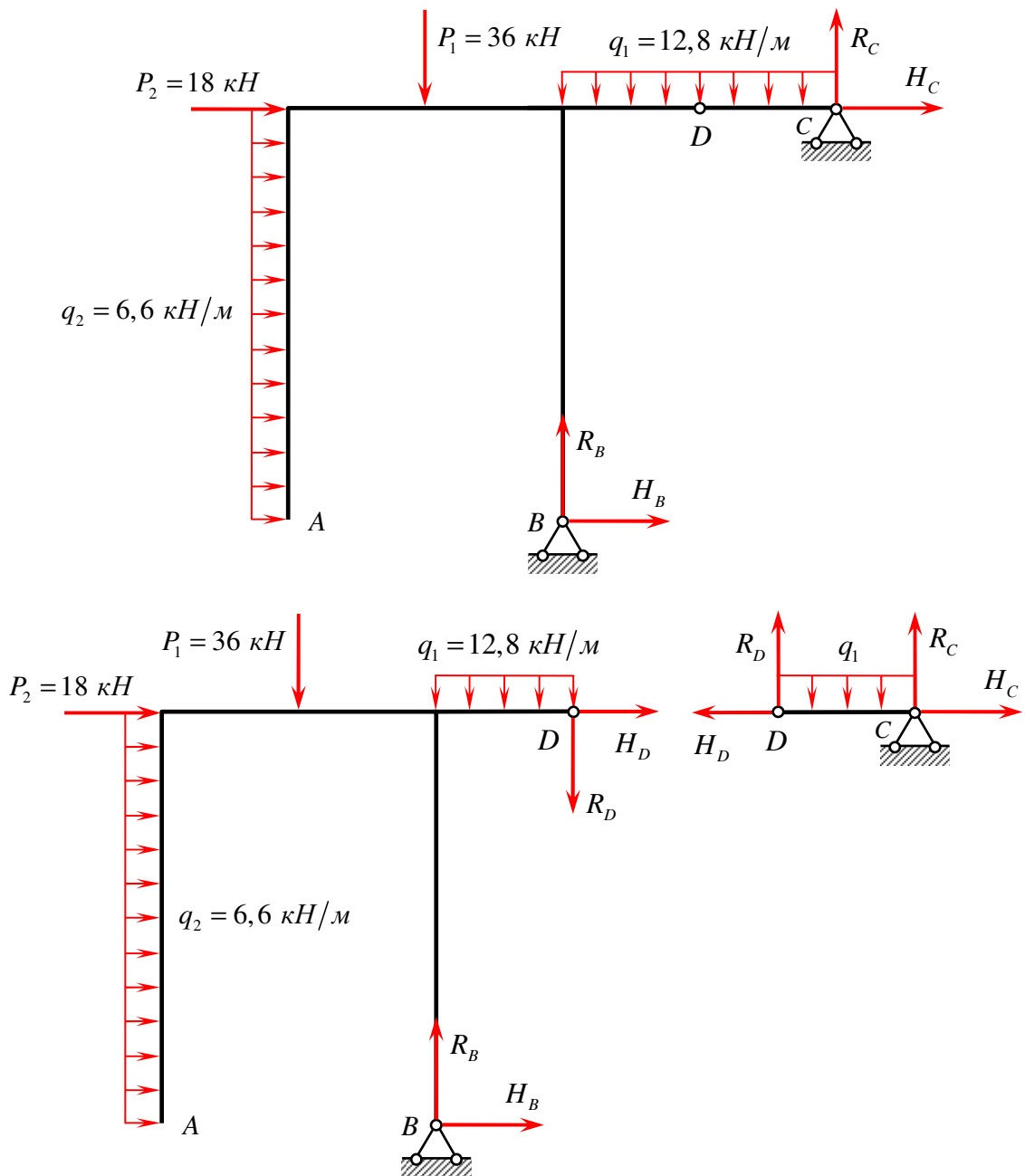
Записываем канонические уравнения метода сил

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0 \end{cases}$$

Таким образом, раскрытие статической неопределенности сводится к нахождению  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  из канонических уравнений.

**4. Определяем единичные  $\delta_{ij}$  и грузовые  $\Delta_{iP}$  перемещения, пользуясь способом Верещагина.**

Строим ОС с заданными нагрузками и соответствующую ей грузовую эпюру  $M_P$ .



Находим опорные реакции и реактивный момент в заделке

Стержень  $CD$ :

$$R_C = R_D = \frac{q_1 \cdot 0,6L_2}{2} = \frac{12,8 \cdot 0,6 \cdot 6,2}{2} = 23,808 \text{ кН}$$

$$\sum F_{ix} = H_C - H_D = 0$$

$$H_C = H_D$$

Рама  $ABD$ :

$$\sum M_B = H_D (h_1 + 0,4h_2) - 0,5P_1L_1 + P_2 (h_1 + 0,4h_2) + 0,4R_DL_2 +$$

$$+ 0,5q_1 (0,4L_2)^2 + 0,5q_2 (h_1 + 0,4h_2)^2 = 0$$

$$\sum F_{ix} = H_B + H_D + P_2 + q_2 (h_1 + 0,4h_2) = 0$$

$$\sum F_{iy} = R_B - R_D - P_1 - 0,4q_1L_2 = 0$$

Решая полученные уравнения, находим

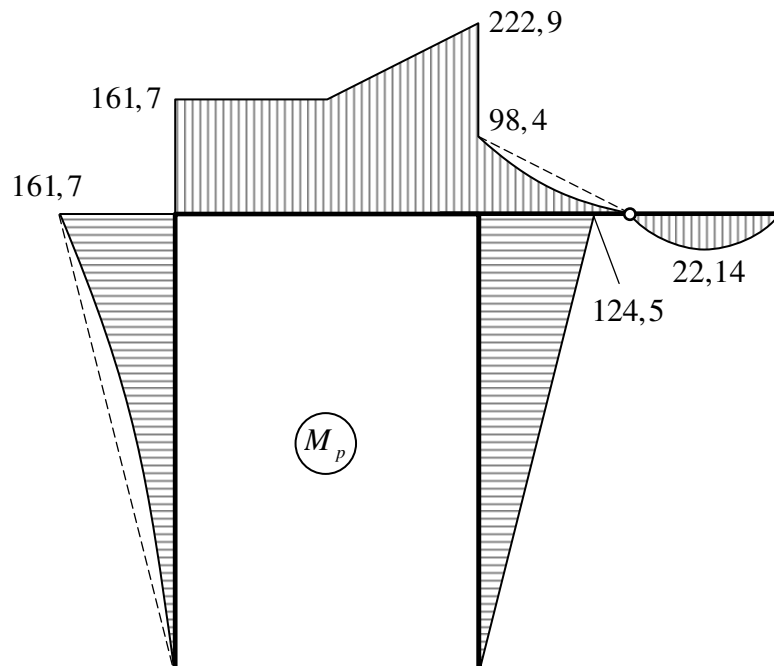
$$H_D = \frac{0,5P_1L_1 - P_2 (h_1 + 0,4h_2) - 0,4R_DL_2 - 0,5q_1 (0,4L_2)^2 - 0,5q_2 (h_1 + 0,4h_2)^2}{h_1 + 0,4h_2} =$$

$$= \frac{18 \cdot 3,4 - 18(5,4 + 0,4 \cdot 4) - 0,4 \cdot 23,808 \cdot 6,2 - 6,4(0,4 \cdot 6,2)^2 - 3,3(5,4 + 0,4 \cdot 4)^2}{5,4 + 0,4 \cdot 4} = -46,415 \text{ кН}$$

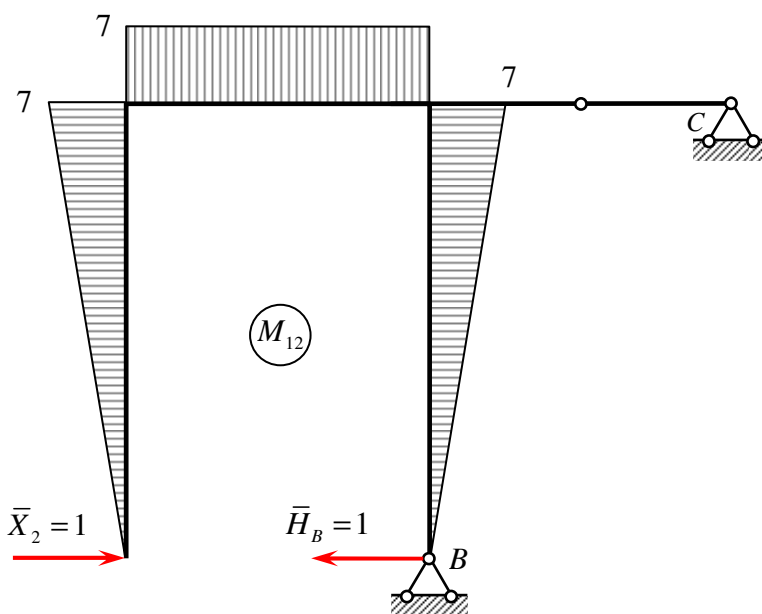
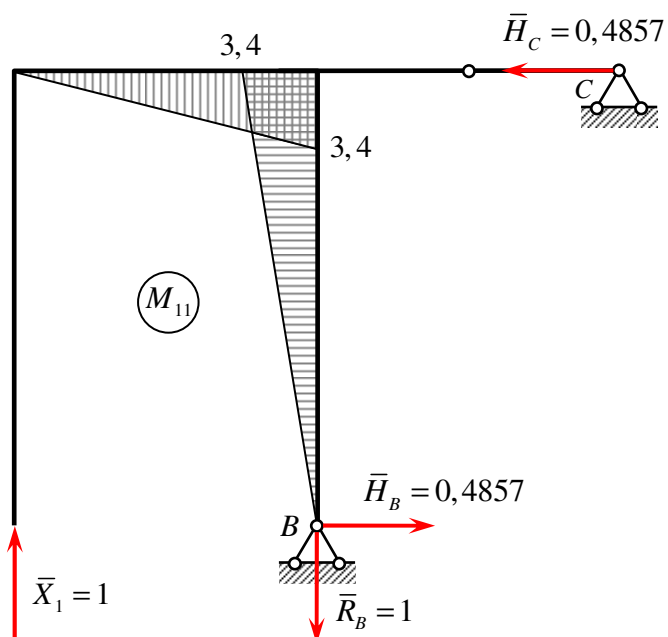
$$H_B = -H_D - P_2 - q_2 (h_1 + 0,4h_2) = 46,415 - 18 - 6,6(5,4 + 0,4 \cdot 4) = -17,785 \text{ кН}$$

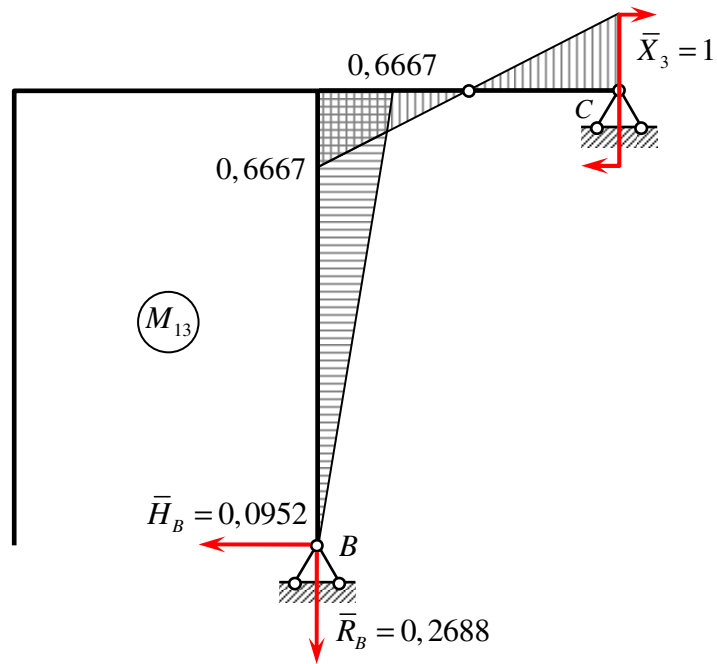
$$R_B = R_D + P_1 + 0,4q_1L_2 = 23,808 + 36 + 0,4 \cdot 12,8 \cdot 6,2 = 91,552 \text{ кН}$$

$$H_C = H_D = -46,415 \text{ кН}$$



Далее строим ОС, нагруженную поочерёдно единичными силами, приложенными взамен лишних неизвестных  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  и соответствующие единичные эпюры  $M_{11}$ ,  $M_{12}$  и  $M_{13}$ .





Вычисляем грузовые перемещения, «перемножая»  $M_P$  и  $M_{11}$ , затем  $M_P$  и  $M_{12}$  и, наконец,  $M_P$  и  $M_{13}$ :

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EJ_x} \left[ -(1,7 \cdot 161,7) \cdot \frac{3,4}{4} - \left( \frac{1,7 \cdot 161,7}{2} \right) \cdot \frac{4 \cdot 3,4}{6} - \left( \frac{1,7 \cdot 222,9}{2} \right) \cdot \frac{5 \cdot 3,4}{6} - \left( \frac{7 \cdot 124,5}{2} \right) \cdot \frac{2 \cdot 3,4}{3} \right] = -\frac{2069,716}{EJ_x}$$

$$\Delta_{2P} = \frac{1}{EJ_x} \left[ \left[ (1,7 \cdot 161,7) + \left( \frac{1,7 \cdot 161,7}{2} \right) + \left( \frac{1,7 \cdot 222,9}{2} \right) \right] \cdot 7 + \left( \frac{7 \cdot 124,5}{2} \right) \cdot \frac{2 \cdot 7}{3} + \left( \frac{7 \cdot 161,7}{2} \right) \cdot \frac{2 \cdot 7}{3} - \left( \frac{6,6 \cdot 7^3}{12} \right) \cdot \frac{7}{2} \right] = \frac{8226,925}{EJ_x}$$

$$\Delta_{3P} = \frac{1}{EJ_x} \left[ \left[ \left( \frac{7 \cdot 124,5}{2} \right) \cdot \frac{2 \cdot 0,6667}{3} - \left( \frac{2,48 \cdot 98,4}{2} \right) \cdot \frac{2 \cdot 0,6667}{3} + \left( \frac{12,8 \cdot 2,48^3}{12} \right) \cdot \frac{0,6667}{2} - \left( \frac{12,8 \cdot 3,72^3}{12} \right) \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{117,405}{EJ_x}$$

Единичные перемещения  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{22}$  и  $\delta_{33}$  найдём, «умножая» эпюры  $M_{11}$ ,  $M_{12}$  и  $M_{13}$  сами на себя. Единичные перемещения  $\delta_{12} = \delta_{21}$ ,  $\delta_{13} = \delta_{31}$  и  $\delta_{23} = \delta_{32}$  найдём, «умножая» соответствующие единичные эпюры друг на друга.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x} \left[ \left( \frac{3,4 \cdot 3,4}{2} \right) \cdot \frac{2 \cdot 3,4}{3} + \left( \frac{7 \cdot 3,4}{2} \right) \cdot \frac{2 \cdot 3,4}{3} \right] = \frac{40,075}{EJ_x}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ_x} \left[ 2 \cdot \left( \frac{7 \cdot 7}{2} \right) \cdot \frac{2 \cdot 7}{3} + (3,4 \cdot 7) \cdot 7 \right] = \frac{395,267}{EJ_x}$$



$$\delta_{33} = \frac{1}{EJ_x} \left[ \left( \frac{7 \cdot 0,6667}{2} \right) \cdot \frac{2 \cdot 0,6667}{3} + \left( \frac{2,48 \cdot 0,6667}{2} \right) \cdot \frac{2 \cdot 0,6667}{3} + \left( \frac{3,72 \cdot 1}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \right] = \frac{2,644}{EJ_x}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ_x} \left[ - \left( \frac{3,4 \cdot 3,4}{2} \right) \cdot 7 - \left( \frac{7 \cdot 3,4}{2} \right) \cdot \frac{2 \cdot 7}{3} \right] = - \frac{95,993}{EJ_x}$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{1}{EJ_x} \left[ - \left( \frac{7 \cdot 3,4}{2} \right) \cdot \frac{2 \cdot 0,6667}{3} \right] = - \frac{5,289}{EJ_x}$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{1}{EJ_x} \left[ \left( \frac{7 \cdot 7}{2} \right) \cdot \frac{2 \cdot 0,6667}{3} \right] = \frac{10,889}{EJ_x}$$

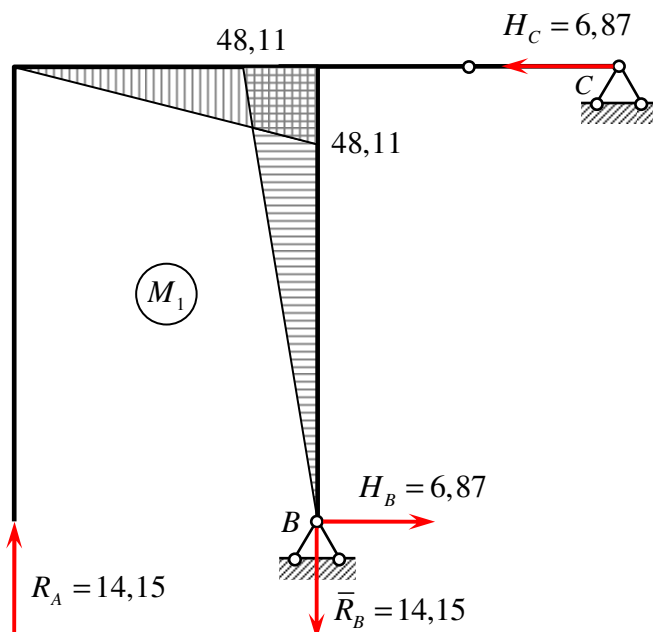
**5. Находим величины лишних неизвестных, подставляя найденные значения в канонические уравнения.**

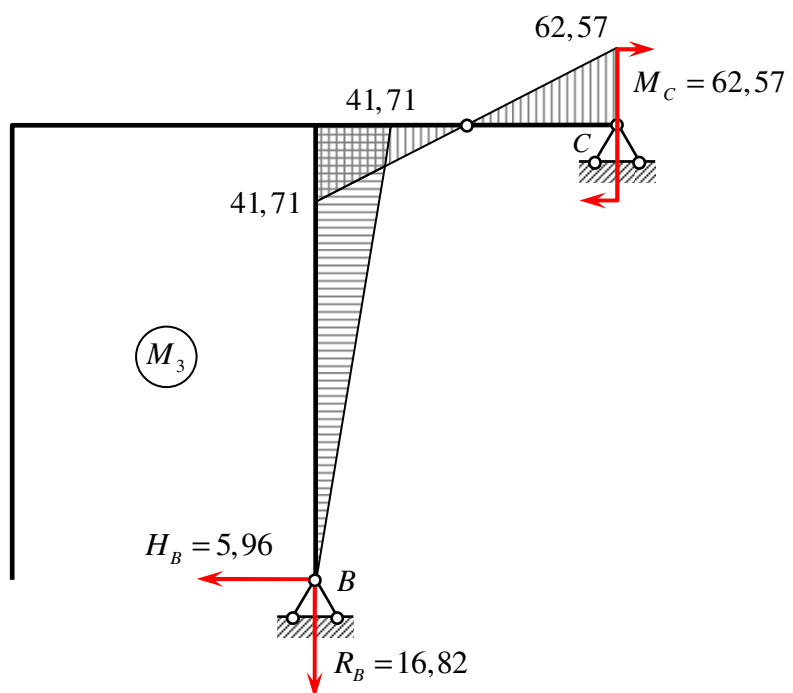
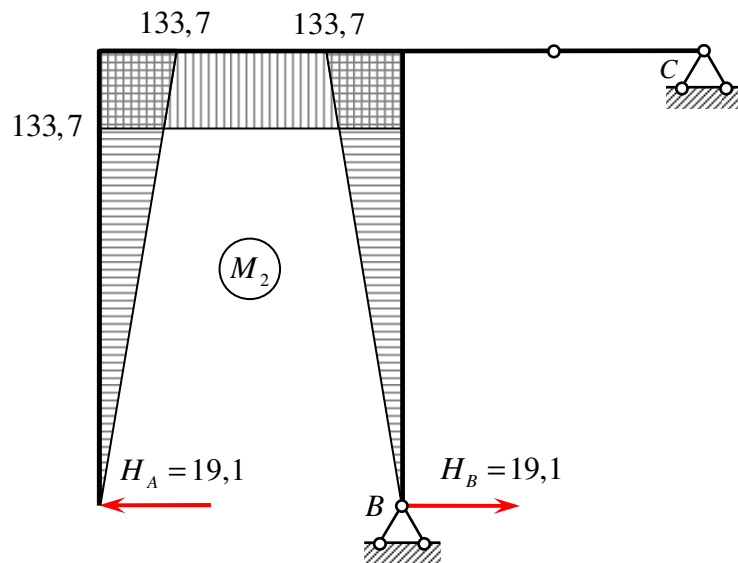
$$\begin{cases} 40,075 X_1 - 95,993 X_2 - 5,289 X_3 = 2069,716 \\ -95,993 X_1 + 395,267 X_2 + 10,889 X_3 = -8226,925 \\ -5,289 X_1 + 10,889 X_2 + 2,644 X_3 = -117,405 \end{cases}$$

$$X_1 = 14,15 \text{ кН}; \quad X_2 = -19,1 \text{ кН}; \quad X_3 = 62,57 \text{ кНм}$$

Результаты  $X_1$  и  $X_3$  положительные, следовательно, направления реакций  $R_A = X_1$  и  $M_C = X_3$  совпадают с принятыми предварительно. Результат  $X_2$  отрицательный, следовательно, направление реакции  $H_A = X_2$  противоположно предварительно принятому.

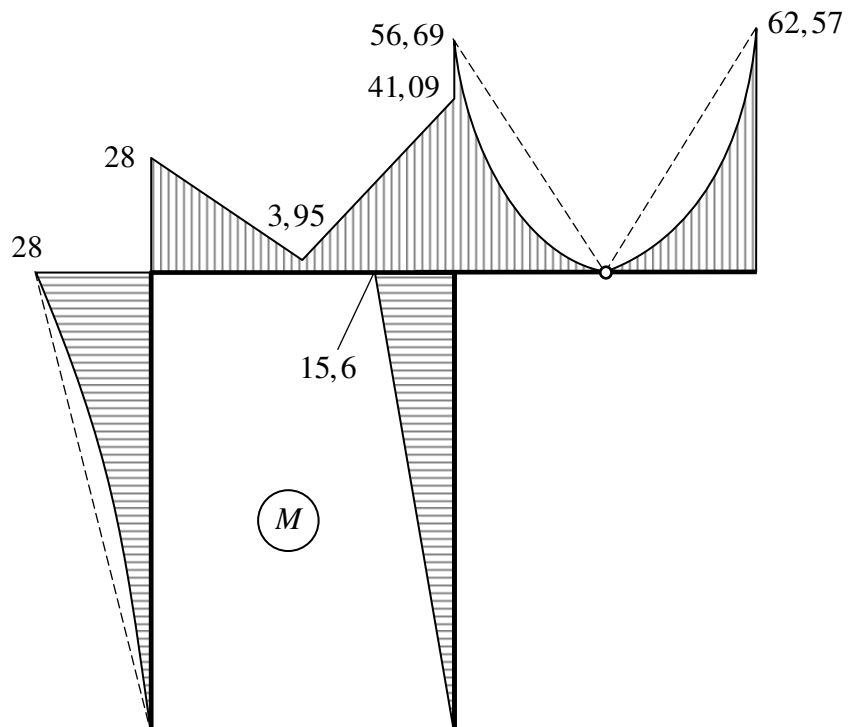
**6. Строим «исправленные» эпюры изгибающих моментов.**





### 7. Строим действительную (окончательную) эпюру изгибающих моментов.

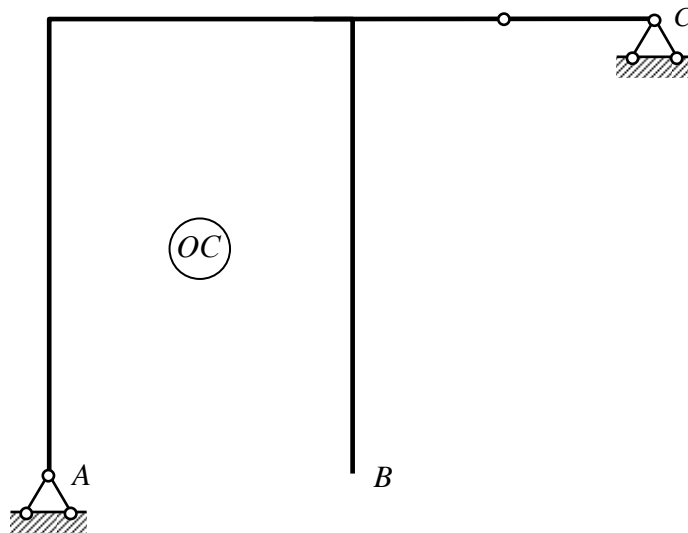
Просуммировав по характерным точкам (на протяжении всей рассчитываемой конструкции) ординаты эпюр  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  от действия сил  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  с ординатами грузовой эпюры  $M_p$  получаем окончательную (суммарную) эпюру изгибающих моментов.

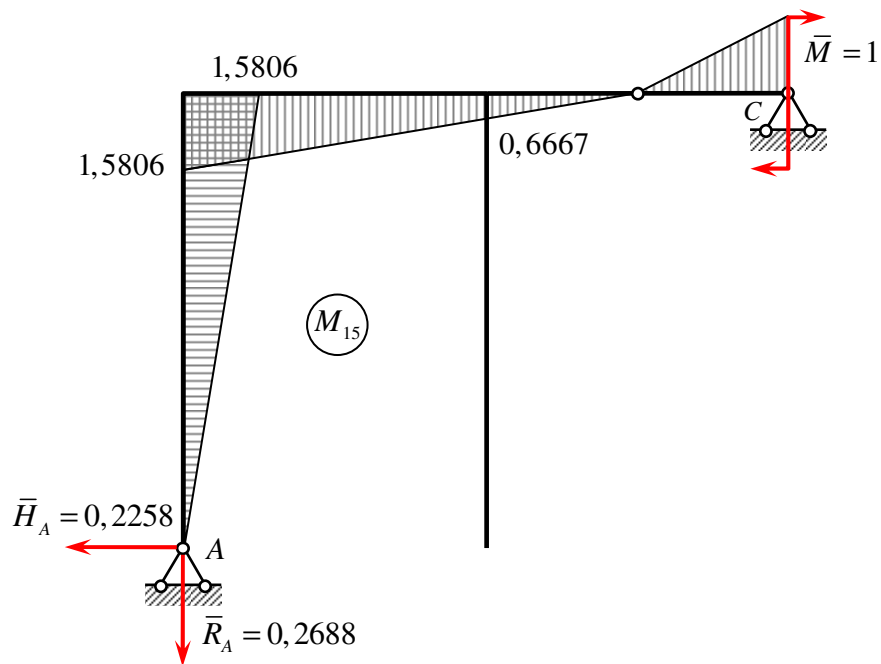
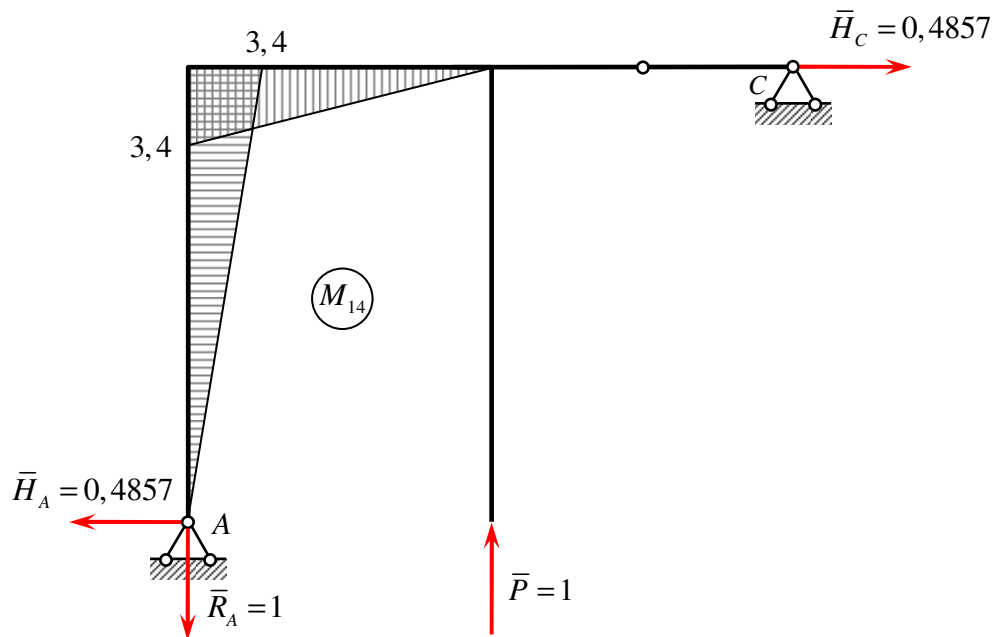


**8. Проводим деформационную проверку решения с использованием другой ОС.**

В качестве лишних примем связи, наложенные шарнирно-неподвижной опорой  $B$  и связь, препятствующую вращению стержня в заделке  $C$ . Отбросив эти связи, получим другой вариант ОС.

Проверим выполнение условия равенства нулю вертикального перемещения сечения  $B$  и поворота сечения  $C$ . Изображаем вспомогательные единичные состояния, необходимое для определения  $y_B$ ,  $\theta_C$  и соответствующие эпюры  $M_{14}$  и  $M_{15}$ .





Определяем  $y_B$  и  $\theta_C$  «перемножив» эпюры  $M$  и  $M_{14}$ , а также  $M$  и  $M_{15}$  способом Верещагина:

$$y_B = \frac{1}{EJ_x} \left[ -\left(\frac{7 \cdot 28}{2}\right) \cdot \frac{2 \cdot 3,4}{3} + \left(\frac{6,6 \cdot 7^3}{12}\right) \cdot \frac{3,4}{2} - \left(\frac{1,7 \cdot 28}{2}\right) \cdot \frac{5 \cdot 3,4}{6} - \left(\frac{1,7 \cdot 3,95}{2}\right) \cdot \frac{4 \cdot 3,4}{6} - \left(\frac{1,7 \cdot 3,95}{2}\right) \cdot \frac{2 \cdot 3,4}{6} - \left(\frac{1,7 \cdot 42,09}{2}\right) \cdot \frac{3,4}{6} \right] = -\frac{0,55}{EJ_x} \approx 0$$

$$\theta_c = \frac{1}{EJ_x} \left[ -\left(\frac{7 \cdot 28}{2}\right) \cdot \frac{2 \cdot 1,5806}{3} + \left(\frac{6,6 \cdot 7^3}{12}\right) \cdot \frac{1,5806}{2} - \left(\frac{1,7 \cdot 28}{2}\right) \left(\frac{0,6667 + 5 \cdot 1,5806}{6}\right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{1,7 \cdot 3,95}{2}\right) \left(\frac{2 \cdot 0,6667 + 4 \cdot 1,5806}{6}\right) - \left(\frac{1,7 \cdot 3,95}{2}\right) \left(\frac{4 \cdot 0,6667 + 2 \cdot 1,5806}{6}\right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{1,7 \cdot 41,09}{2}\right) \left(\frac{5 \cdot 0,6667 + 1,5806}{6}\right) - \left(\frac{2,48 \cdot 56,69}{2}\right) \cdot \frac{2 \cdot 0,6667}{3} + \left(\frac{3,72 \cdot 62,57}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} + \right. \\ \left. + \left(\frac{12,8 \cdot 2,48^3}{12}\right) \cdot \frac{0,6667}{2} - \left(\frac{12,8 \cdot 3,72^3}{12}\right) \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{0,156}{EJ_x} \approx 0$$

### 9) Строим эпюры продольных $N$ и поперечных $Q$ сил.

Стержень  $CD$ :

$$\sum M_D = R_C \cdot 0,6L_2 - 0,5q_1(0,6L_2)^2 - M_C = 0$$

$$\sum M_C = R_D \cdot 0,6L_2 - 0,5q_1(0,6L_2)^2 + M_C = 0$$

$$R_C = \frac{0,5q_1(0,6L_2)^2 + M_C}{0,6L_2} = \frac{0,5 \cdot 12,8 \cdot 3,72^2 + 62,57}{3,72} = 40,63 \text{ кН}$$

$$R_D = \frac{0,5q_1(0,6L_2)^2 - M_C}{0,6L_2} = \frac{0,5 \cdot 12,8 \cdot 3,72^2 - 62,57}{3,72} = 6,99 \text{ кН}$$

Рама  $ABD$ :

$$\sum M_E = H_B(h_1 + 0,4h_2) - H_A(h_1 + 0,4h_2) - R_A L_1 - 0,4R_D L_2 + 0,5P_1 L_1 - \\ - 0,5q_1(0,4L_2)^2 + 0,5q_2(h_1 + 0,4h_2)^2 = 0$$

$$\sum F_{iy} = R_B + R_A - R_D - P_1 - 0,4q_1 L_2 = 0$$

$$H_B = \frac{H_A(h_1 + 0,4h_2) + R_A L_1 + 0,4R_D L_2 - 0,5P_1 L_1 + 0,5q_1(0,4L_2)^2 - 0,5q_2(h_1 + 0,4h_2)^2}{h_1 + 0,4h_2} =$$

$$= \frac{19,1 \cdot 7 + 14,15 \cdot 3,4 + 6,99 \cdot 2,48 - 36 \cdot 1,7 + 6,4 \cdot 2,48^2 - 3,3 \cdot 7^2}{7} = 15,61 \text{ кН}$$

$$R_B = -R_A + R_D + P_1 + 0,4q_1 L_2 = -14,15 + 6,99 + 36 + 12,8 \cdot 2,48 = 60,58 \text{ кН}$$

$$\sum F_{ix} = H_C - H_A + H_B + P_2 + q_2(h_1 + 0,4h_2) = 0$$

$$H_C = H_A - H_B - P_2 - q_2(h_1 + 0,4h_2) = 19,1 - 15,61 - 18 - 6,6 \cdot 7 = -60,71 \text{ кН}$$

