Самарский муниципальный университет Наяновой

В. С. Исаханова, А. Н. Савин

Математический кружок при университете Наяновой

Материалы занятий в 5–7 классах

1998/99 уч. год

САМАРА
1999

Исаханова В. С., Савин А. Н.

Математический кружок при университете Наяновой. Учебное издание. — Самара, 1999. — 92 с., ил.

Сборник содержит материалы занятий математического кружка при университете Наяновой для 5–7-х классов, а также варианты задач математического праздника, состоявшегося впервые в этом учебном году.

Задачник может служить пособием для самостоятельной подготовки к олимпиадам по математике. Рекомендуется учащимся 5–9-х классов и учителям математики.

Учебное издание

Предисловие

В этом учебном году (1998/99) в октябре состоялся первый математический праздник — двухэтапное соревнование для учащихся 5–7 классов. Учредители праздника — университет Наяновой и Центр Развития Образования.

Праздник прошел в два тура: в первом (отборочном) туре приняло участие 250 школьников из 25 учебных заведений г. Самара, во второй (устный) тур были отобраны 90 школьников по результатам первого тура.

Первый тур представлял собой обычную письменную олимпиаду. Ребятам раздали по листочку с условиями задач, на выполнение которых отводилось 2,5 часа. Учителей, сопровождающих школьников, и родителей собрали в отдельной аудитории и провели рассказ об университете.

В воскресенье между турами, была проведена обзорная лекция в помощь участникам второго тура. В этот же день для желающих состоялся показ работ с объяснением допущенных ошибок, учителя также могли посмотреть работы своих учеников.

Второй тур — это первая попытка провести в г. Самара устную олимпиаду. Участники общались непосредственно с членами жюри, и поэтому второй тур прошел очень живо. Задачи второго тура были не сложнее, чем на первом туре. Кроме того, большую помощь оказала подготовительная лекция. Треть от числа участников решили абсолютно все задачи. По окончании второго тура уже были известны результаты. Всем учителям, пришедшим на олимпиаду, раздали по комплекту заданий за все классы.

“Раздача слонов” состоялась в ноябре. Награждены были все участники второго тура: 30 дипломов I степени, 17 дипломов II степени, 7 — III степени, 13 почетных грамот, 21 диплом за успешное выступление и несколько дипломов участника. Все призеры математического праздника получили памятные значки.

С 1 ноября при университете Наяновой открылись городские воскресные математические кружки для учащихся 5-7-х классов. Из призеров математического праздника были созданы две сильные группы (из 5–6-х и 7-х классов), с которыми преподаватели университета начали работу. Систему кружков при университете Наяновой можно рассматривать как помощь учащимся самарских школ, ведь в настоящее время в школах почти не ведется работа с одаренными школьниками. В кружок могут быть зачислены также школьники по рекомендации учителей и родителей через собеседование. Цель кружка — развитие математического мышления, пространственного воображения, исследовательских навыков, развития правильной математической речи учащихся, проявивших интерес к математике, создание среды, способствующей раскрытию способностей, побуждение школьников к самостоятельным занятиям.

Технология педагогического процесса. Занятия кружка проводились по воскресеньям, один раз в две недели. В воскресенья между занятиями для участников устраивались консультации. На каждом занятии школьнику выдавался листочек с написанным на нем конспектом этого занятия и домашним заданием. Так что ребятам не нужно было тратить время на запись условий задач, да и домой они уходили не с пустыми руками. На консультацию приглашались только желающие, с которыми руководители кружка обсуждали неясные моменты в занятии и разбирали домашние задачи.

В конце учебного года для кружковцев состоялся итоговый зачет. Конечно, его сдали не все, а только самые усердные. Они то и получили памятный подарок и сертификат об окончании первого года обучения. Кроме того, с этими школьниками началась индивидуальная подготовка к заключительному этапу Всероссийского конкурса журнала “Квант”.

В этом сборнике представлены материалы занятий математического кружка, а также варианты задач, предлагавшиеся на математическом празднике. Книга рекомендуется учащимся 5–9-х классов и учителям математики.

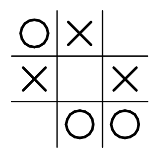
Математический праздник, I тур

5 класс

Задача 1. Сумма двух чисел больше одного из них на 19 и больше другого на 98. Чему равна эта сумма?

◀ Понятно, что одно из чисел равно 19, а другое — 98. Значит, их сумма равна 117. ▶

Задача 2. Василиса Премудрая и Змей Горыныч играли в «крестики-нолики». После того как Василиса сделала очередной ход, игровое поле выглядело так, как показано на рисунке.



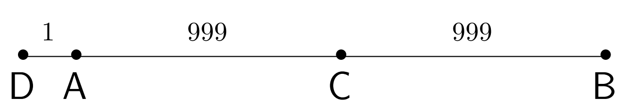
Кто играл крестиками и кто выиграет эту партию? (В игре первый ход всегда делают крестики.)

◀ Так как на поле одинаковое число крестиков и ноликов, то последний ход делали “нолики”. Но согласно условию последний ход сделала Василиса. Итак Змей Горыныч играет крестиками, а Василиса — ноликами.

Эту партию выиграет Горыныч, если, конечно, додумается следующим ходом поставить крестик на центральное поле. ▶

Задача 3. На доске нарисован отрезок AB длиной 1998. Петя поставил две точки C и D так, что $CA = CB = 999$, $DA = 1$, $DB = 1999$. Чему равно расстояние между точками C и D?

◀ Поскольку $CA + CB = AB$, то точка C лежит на отрезке AB. Аналогично, $DA + AB = DB$, значит, точка D лежит на отрезке DB. Итак, четыре точки A, B, C, D лежат на одной прямой и в том порядке, как указано на рисунке.



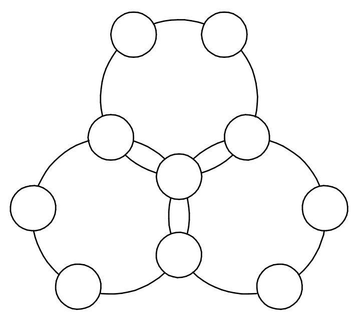
Следовательно, расстояние между точками C и D равно $DA + AC =$ $= 1000$. ▶

Задача 4. Аня, Боря, Вера и Гена всего поймали 10 рыбок, причем каждый из детей поймал разное количество рыбок. Аня поймала больше всех, а Вера — меньше всех. Кто поймал больше рыбок, мальчики или девочки?

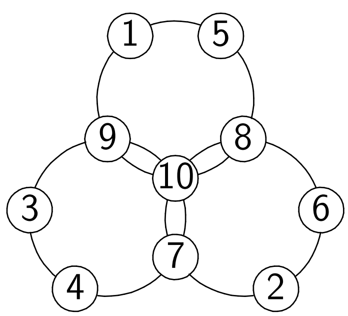
◀ Ввиду того, что ребята поймали различное число рыбок, вместе они поймали не меньше $1+2+3+4=10$ рыбок. Это как раз подходит под условие задачи. Если бы кто-то из них поймал отличное от 1, 2, 3 и 4 количество рыбок, то всего получилось бы больше 10 рыбок, что неправильно.

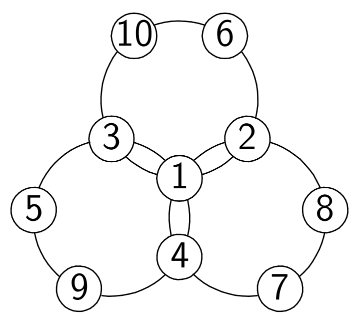
Аня поймала больше всех, а именно, 4 рыбки, Вера — меньше всех, одну рыбку. Таким образом, девочки поймали $1+4=5$ рыбок и мальчики тоже поймали $2+3=5$ рыбок. Ответ — одинаково. ▶

Задача 5. Расставьте в кружочках числа от 1 до 10 так, чтобы суммы чисел в каждом из трех кругов были равны.



◀ Существует много вариантов расстановки чисел. На рисунке приведены два из них, для которых суммы чисел в кругах соответственно равны 33 и 22.





Заметим, что первая расстановка задает наибольшее возможное значение суммы, а вторая — наименьшее. ▶

Задача 6. Какая цифра в выражении $9A : 1A = A$ заменена буквой A? Укажите все такие значения A и покажите, что других нет.

◀ Выражение можно переписать в виде $1A \cdot A = 9A$. Получаем, что произведение двух чисел, оканчивающихся цифрой A, также оканчивается цифрой A. Следовательно, цифра A может быть лишь одной из следующих: 0, 1, 5, 6. Проверяя каждый из этих четырех вариантов, убеждаемся, что значение $A=6$ удовлетворяет равенству, а остальные не подходят. ▶

6 класс

Задача 1. Квадрат со стороной 1 м разрезали на квадраты со стороной 1 см и выстроили их в один ряд в виде полосы шириной 1 см. Какой длины получилась полоса?

◀ После разрезания получилось $100 \cdot 100 = 10\,000$ квадратов со стороной 1 см. Следовательно, длина полосы составляет $10\,000$ см $=$ $= 100$ м. ▶

Задача 2. Винни-Пуху подарили в день рождения бочонок с медом массой 7 кг. Когда Винни-Пух съел половину меда, то бочонок с оставшимся медом стал иметь массу 4 кг. Сколько килограммов меда было первоначально в бочонке?

◀ После съедания Винни-Пухом половины меда масса бочонка с медом уменьшилась на 3 кг. Отсюда заключаем, что полбочонка меда весит 3 кг, значит, первоначально в бочонке было 6 кг меда, а сам бочонок весит 1 кг. ▶

Задача 3. Из чисел 21, 19, 30, 25, 3, 12, 9, 15, 6, 27 подбери такие три числа, сумма которых будет равна 50.

◀ *Ответ.* $19 + 25 + 6 = 50$. ▶

Задача 4. Каждым ударом силач Шварценеггер разбивает кусок бетона на четыре части. На сколько кусков он расколол бетонную плиту, если сделал 666 ударов?

◀ С каждым ударом общее число бетонных кусков увеличивается на 3 (ведь из одного куска получается четыре). Вначале был один кусок — целая бетонная плита. После 666 ударов образуется $1 + 3 \cdot 666 =$ $= 1999$ кусков. ▶

Задача 5. Можно ли в пустых клетках таблицы 3×3, изображенной на рисунке, расставить числа 3, 5 и 12 так, чтобы получился магический квадрат, т. е. такая таблица, у которой сумма чисел в любой строке, любом столбце и на диагоналях одна и та же. Ответ объясните.

7	17	
	9	13
15	1	

◀ *Первое решение.* После расстановки данных чисел в таблице лишь одно число будет четным (12), а все остальные нечетны. Следовательно, сумма чисел в строке, в которой стоит число 12, является четной, а в двух других строках она нечетна. Поэтому все суммы не могут быть равными.

Второе решение. Сумма чисел во втором столбце равна $17+9+1 = 27$. Поэтому сумма чисел в любой строке, столбце и на диагоналях таблицы составляет 27. В нижней строке недостающее число должно быть равно 11 (иначе не образуется требуемая сумма). Однако среди данных такого числа нет, т. е. магический квадрат составить не получится.

Задачу можно решить и перебором всех возможных расстановок указанных чисел. Всего их 6. Действительно, на первую пустую клетку можно поставить любое из трех данных чисел (3 способа), на вторую — любое из двух оставшихся (2 способа), на третью — последнее число (1 способ). Итого получается $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ различных расстановок. Подробнее см. далее тему “Комбинаторика”. ►

Задача 6. Круглая поляна обсажена деревьями. Леший и кикимора пошли вокруг поляны, считая деревья. Они идут в одном направлении, но начали в разных местах. Дерево, которое у кикиморы было седьмым, у лешего было двадцатым, а дерево, которое у лешего было седьмым, у кикиморы было девяносто третьим. Сколько деревьев растет вокруг поляны? Ответ объясните.

◄ *Ответ.* 99 деревьев. Дерево, которое у кикиморы было седьмым, у лешего было двадцатым. Отсчитаем шесть деревьев назад. Получается, что первое дерево кикиморы у лешего было четырнадцатым, а последнее ее дерево — тринадцатым. Седьмое дерево лешего у кикиморы было 93-м. Отсчитаем шесть деревьев вперед. Получается, что тринадцатое дерево лешего — это 99-е дерево кикиморы. Поскольку оно у кикиморы последнее, всего деревьев — 99. ►

7 класс

Задача 1. Мальчик каждую букву своего имени заменил порядковым номером этой буквы в русском алфавите. Получилось число 510141. Как звали мальчика?

◄ Зашифрованное имя можно разбить лишь двумя способами на натуральные числа, не большие 33 (в русском алфавите 33 буквы): 5–10–1–4–1 и 5–10–14–1. Раскодировав первый вариант, получаем непонятную абракадабру — `ДИАГА`. Второй вариант определяет имя мальчика — `ДИМА`. ►

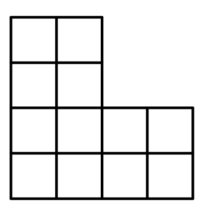
Задача 2. От кончика носа дяди Гоши к переносице ползет бешеный муравей. Каждый раз он сначала поднимается на 3 мм, а потом спускается на 1 мм. До переносицы муравей дополз через 2,5 минуты. Узнай длину носа дяди Гоши, если известно, что за 1 сек муравей проползает 1 мм.

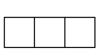
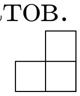
◀ За 4 сек муравей поднимается на 3 мм и спускается на 1 мм, т. е. сдвигается от исходной точки на 2 мм. До переносицы он полз 2,5 мин $= 150$ сек. Так как $150 = 37{\cdot}4{+}2$, то муравей 37 раз сдвигался на 2 мм, проползая за 4 сек вверх 3 мм и вниз 1 мм, а оставшиеся последние 2 сек он полз вверх. После того, как муравей дополз до переносицы, вниз он уже не спускался. Подсчитываем длину носа: $37 \cdot 2 + 2 = 76$ (мм) $=$ $= 7{,}6$ (см). ▶

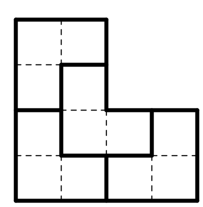
Задача 3. Сколько всего точек нарисовано на всех костях полного набора домино?

◀ *Ответ.* 168 точек. Давайте выясним, сколько раз встречается каждая из цифр 0 (пустышка), 1, 2, ... , 6 в наборе домино (на дубль-доминошках цифру будем учитывать два раза). Начнем с цифры 1. Она встречается на следующих доминошках: $\boxed{1|0}$ $\boxed{1|1}$ $\boxed{1|2}$ $\boxed{1|3}$ $\boxed{1|4}$ $\boxed{1|5}$ $\boxed{1|6}$. Всего 8 раз. Понятно, что любая другая цифра ничем не хуже единицы, т. к. в наборе домино все цифры равноправны. Так что каждая цифра встречается по 8 раз. Тогда на всех костях набора нарисовано $8 \cdot (0 + 1 + 2 + \ldots + 6) = 8 \cdot 21 = 168$ точек. ▶

Задача 4. Фигура состоит из 12 равных квадратов (см. рисунок). Раздели эту фигуру на четыре равные части.



◀ Поскольку $12 : 4 = 3$, то каждая часть будет состоять из трех квадратов. Это может быть либо полоска , либо уголок . Нетрудно показать, что на полоски исходную фигуру разбить нельзя, а на уголки можно и только одним способом (см. рисунок). ▶



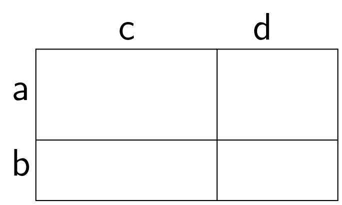
Задача 5. Цифры трехзначного числа A записали в обратном порядке и получили число B. Может ли число, равное сумме A и B, состоять только из нечетных цифр?

◀ *Ответ.* Да, может. Например, для $A = 209$, $B = 902$, получаем число $A + B = 1111$, все цифры которого нечетны.

Вообще, трехзначное число $A = \overline{abc}$ удовлетворяет условию в том и только в том случае, когда $a + c = 11$, 13, 15 или 17, и b — любая цифра от 0 до 4. ▶

Задача 6. Прямоугольник разделен на четыре прямоугольные части двумя разрезами, параллельными его сторонам. Площадь левой верхней части равна 3 кв. см, правой верхней — 2,4 кв. см, левой нижней — 2,5 кв. см. Найдите площадь правой нижней части. Ответ обоснуйте.

◀ Обозначим отрезки, на которые разрезы делят стороны исходного прямоугольника, буквами a, b, c, d так, как показано на рисунке снизу. По условию $ac = 3$, $ad = 2{,}4$, $bc = 2{,}5$, а неизвестная площадь правой нижней части равна bd.



Попробуем выразить bd. Перемножив площадь левого нижнего и правого верхнего прямоугольников, получим $abcd$. Чтобы получить bd, надо исключить из этого произведения a и c. Это можно сделать, разделив его на известное нам произведение ac. Получаем формулу $bd = bc \cdot ad/(ac)$. Отсюда находим $bd = 2{,}5 \cdot 2{,}4/3 = 2$ (кв. см.). ▶

Лекция для участников II тура

5–6 классы

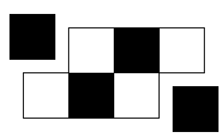
Задача 1. Из шахматной доски вырезали две противоположные угловые клетки. Докажите, что оставшуюся фигуру нельзя разрезать на доминошки 2×1 клеток.

◀ Заметим, что доминошка всегда покрывает одну черную и одну белую клетку, поэтому если какая-то фигура покрыта доминошками, то она содержит одинаковое количество черных и белых полей.

В шахматной доске 8×8 всего 32 черных и 32 белых поля. Две противоположные клетки доски окрашены в один и тот же цвет, значит, если их вырезать, то оставшаяся часть будет состоять из 30 клеток одного цвета и 32 клеток другого. Такую фигуру доминошками покрыть нельзя. ▶

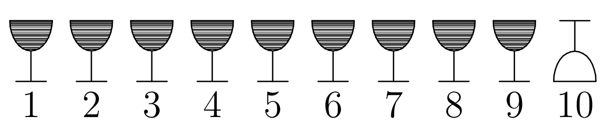
Методические замечания. Приведем типовое неверное решение этой задачи: "Вырезав из шахматной доски две клетки, останется фигура площадью 62 клетки. Так как 62 делится на 2, то эту фигуру можно разбить на доминошки из двух клеток".

Если так, то давайте рассмотрим доску 2×4 и выкинем из нее две противоположные угловые клетки. Получится фигура площадью 6 клеток (см. рисунок). Число 6 тоже делится на 2, однако попробуйте замостить ее доминошками — не получается!



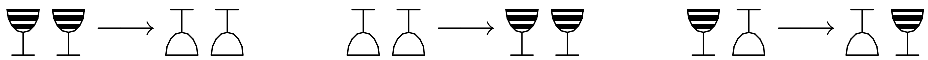
Так рассуждать нельзя. Причина этой логической ошибки заключается в замене верного утверждения: "Если можно разрезать, то делится" неверным обратным ему.

Задача 2. На столе стоят 10 стаканов. Из них 9 стаканов стоят правильно, а один перевернут донышком вверх.



Разрешается одновременно переворачивать любые два стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?

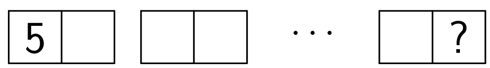
◀ Будем следить за числом правильно стоящих стаканов. Вначале их 9. За один ход можно выбрать либо два правильных стакана, либо два перевернутых стакана, либо два разных. Результат каждого выбора показан на рисунке. Подписи снизу указывают, как изменяется число стаканов, стоящих правильно.



-2 $\qquad$ $+2$ $\qquad$ не изменяется

Мы видим, что число правильных стаканов каждый раз либо уменьшается на 2, либо увеличивается на 2, либо вовсе не изменяется, следовательно, четность числа стаканов остается одной и той же. Поскольку первоначальное число стаканов, стоящих правильно, нечетно (оно равно 9), то оно все время будет оставаться нечетным, т. е. не может стать равным 10. Это означает, что все стаканы нельзя поставить правильно. ►

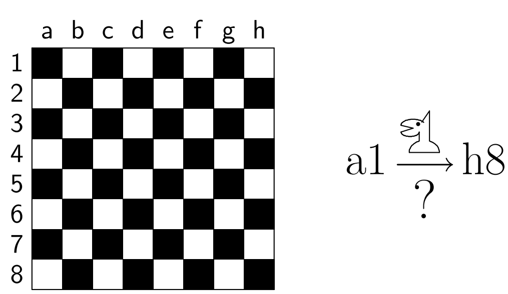
Задача 3. Весь комплект домино выложили по правилам игры. Известно, что первой стоит пятерка. Какая цифра стоит последней?



◄ Давайте посчитаем, сколько раз встречается пятерка в наборе домино. Она входит в следующие кости: $\boxed{5|0}$ $\boxed{5|1}$ $\boxed{5|2}$ $\boxed{5|3}$ $\boxed{5|4}$ $\boxed{5|5}$ $\boxed{5|6}$. Всего 8 раз. То же самое можно сказать про любую другую цифру: пустышку, единицу, двойку и т. д. — все они входят по 8 раз.

На стыке двух доминошек стоят две одинаковые цифры. Значит, все половинки доминошек, стоящие на стыке, разбиваются на пары одинаковых. Без пары останутся только крайние половинки: самая левая (это пятерка) и самая правая. Так как каждая цифра в наборе домино встречается четное число раз, то на другом конце тоже должна стоять пятерка. ►

Задача 4. На поле a1 шахматной доски стоит конь. Может ли он обойти всю доску, побывав на каждом поле ровно один раз, и попасть в противоположное угловое поле h8?



◀ Нетрудно проверить, что конь с каждым ходом меняет цвет поля, на котором стоит. В самом начале конь находится на черном поле a1. Поэтому, если он сделает четное число ходов, то окажется опять на черном поле, а если нечетное — на белом. Чтобы обойти все клетки шахматной доски, ему потребуется сделать 63 хода:

$$\text{номера полей}\quad \underset{1}{\boxed{\text{Ч}}} \xrightarrow{1\text{ ход}} \underset{2}{\boxed{\text{Б}}} \xrightarrow{2\text{ ход}} \underset{3}{\boxed{\text{Ч}}} \xrightarrow{3\text{ ход}} \ldots \xrightarrow{62\text{ ход}} \underset{63}{\boxed{\text{Ч}}} \xrightarrow{63\text{ ход}} \underset{64}{\boxed{\text{Б}}}.$$

Таким образом, путь коня должен закончиться на белом поле. Однако клетка h8 черная, значит, она не может быть завершающей. ▶

Домашнее задание

Задача 1. В пустых клетках полоски поставить числа 0 или 1 так, чтобы сумма любых трех рядом стоящих чисел была четна.

0							1

◀ Чтобы сумма первых трех чисел была четна, во вторую и третью клетки полосы нужно поставить либо числа 0 и 0, либо 1 и 1. Далее все пустые клетки последовательно заполняются числами 0 или 1, каждое очередное число однозначно определяется по предыдущим двум. Вот, что получается для каждого случая:

0	0	0	0	0	0	0	1

0	1	1	0	1	1	0	1

Первый случай не подходит, т. к. сумма последних трех чисел нечетна. А второй случай — то, что нужно. ▶

Задача 2. Хулиганы Вася и Петя порвали стенгазету, причем Петя рвал каждый кусок на 3 части, а Вася — на 5. При попытке собрать стенгазету нашли 100 обрывков. Докажите, что нашли не все обрывки.

◀ Петя из одного куска делает три, т. е. общее число кусков после действия Пети возрастает на 2. Аналогично для Васи — разорвав один кусок на пять частей, он увеличивает общее число обрывков на 4. Итак, с каждым разом число кусков увеличивается либо на 2, либо на 4, значит, четность числа кусков не меняется. Первоначально был один большой кусок — это целая стенгазета. Число 1 — нечетное, поэтому число обрывков все время будет оставаться нечетным, то есть не может оказаться равным 100.

Наименьшее возможное число обрывков в этой задаче равно 101. Ищите еще хотя-бы один недостающий кусок! ▶

7 класс

Задача 1. Какая последняя цифра в записи чисел 137^{10}, 333^{333}?

◀ На последнюю цифру степени какого-то числа влияет только последняя цифра этого числа, так что 137^{10} оканчивается той же цифрой, что и число 7^{10}. Понаблюдаем за последними цифрами степеней семерки:

$$7^1 = \underline{7}, \qquad 7^2 = 4\underline{9}, \qquad 7^3 = 34\underline{3}, \qquad 7^4 = \ldots\underline{1}, \qquad 7^5 = \ldots\underline{7}, \qquad \ldots$$

Понятно, что дальше последние цифры степеней будут повторяться с периодом 4. Имеем

$$7^{4k+1} = \ldots 7, \qquad 7^{4k+2} = \ldots 9, \qquad 7^{4k+3} = \ldots 3, \qquad 7^{4k} = \ldots 1.$$

Число 10 имеет вид $4k+2$ (при делении на 4 дает остаток 2), поэтому 137^{10} оканчивается цифрой 9.

Аналогично, рассматривая последние цифры степеней тройки, получим

$$3^{4k+1} = \ldots 3, \qquad 3^{4k+2} = \ldots 9, \qquad 3^{4k+3} = \ldots 7, \qquad 3^{4k} = \ldots 1.$$

Представим $333 = 4 \cdot 83 + 1$, тогда $333^{333} = \ldots 3$. ▶

Задача 2. Докажите, что дробь $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ несократима.

◀ Допустим, что дробь сократима на целое число $d > 1$. Тогда $12n + 1 = Ad$, $30n + 2 = Bd$, где A, B — какие-то целые числа. Попробуем избавиться от n. Для этого первое равенство умножим на 5, второе — на 2 и вычтем одно из другого:

$$5 \cdot (12n + 1) - 2 \cdot (30n + 2) = 5Ad - 2Bd,$$
$$1 = (5A - 2B)d.$$

Получили, что число 1 разлагается в произведение двух сомножителей, один из которых d больше 1. Это невозможно, значит, предположение неверно, и дробь является несократимой. ▶

Задача 3. Найдите остаток от деления $8+79+780+7781+77782+$ $+\,777783$ на 7.

◀ Найдем остатки от деления на 7 каждого слагаемого:

$$8 = 7 + 1 \to \text{ остаток } 1,$$
$$79 = 77 + 2 \to \text{ остаток } 2,$$
$$780 = 777 + 3 \to \text{ остаток } 3,$$
$$7781 = 7777 + 4 \to \text{ остаток } 4,$$
$$77782 = 77777 + 5 \to \text{ остаток } 5.$$

Таким образом, исходное число дает при делении на 7 такой же остаток, что и число $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, т. е. 1. ▶

Задача 4. Докажите, что $n(n + 2)(n + 7) \vdots 6$.

◀ Преобразуем выражение $n(n+2)(n+7) = n(n+2)\big((n+1)+6\big) = n(n + 1)(n + 2) + \underbrace{6n(n + 2)}_{\text{кратно } 6}$. Второе слагаемое здесь делится на 6, а первое представляет собой произведение трех последовательных целых чисел. Значит, среди этих трех чисел по крайней мере одно четно, и одно кратно 3, следовательно, их произведение делится на 6. Итак, в данном соотношении каждое слагаемое, а, значит, и их сумма, делится на 6. ▶

Задача 5. При каких натуральных n дробь — целое число:
а) $\dfrac{n+5}{n-1}$, б) $\dfrac{3n^2-3n+20}{n-1}$, в) $\dfrac{7n^2-7n+5}{n+1}$?

◀ а) Преобразуем дробь

$$\frac{n+5}{n-1} = \frac{(n-1)+6}{n-1} = 1 + \frac{6}{n-1}.$$

Отсюда ясно, что исходная дробь является целым числом, когда дробь $\dfrac{6}{n-1}$ — целое число, т. е. $n-1$ является делителем числа 6. Итак, $n-1$ равно 1, 2, 3 или 6, откуда n может принимать значения соответственно 2, 3, 4 или 7.

Замечание к решению. Число 6 кроме положительных делителей 1, 2, 3, 6 имеет также отрицательные -1, -2, -3, -6. Но они не рассматривались по той причине, что по условию $n \in \mathbb{N}$, и, значит, $n - 1 \geqslant 0$.

б) *Ответ.* $n = 2, 3, 5, 6, 11$ или 21. Задача решается аналогично пункту (а). Выделяем целую часть дроби:

$$\frac{3n^2-3n+20}{n-1} = \frac{3n(n-1)+20}{n-1} = 3n + \frac{20}{n-1}.$$

Поскольку число $3n$ — целое, то и дробь $\dfrac{20}{n-1}$ должна являться целым числом, т. е. $n-1$ — делитель числа 20. Дальше все ясно.

в) В этом пункте несколько труднее выделить целую часть дроби. Для этого проведем деление "уголком".

$$\begin{array}{r|l} 7n^2-7n+5 & n+1 \\ \cline{2-2} \underline{7n^2+7n} & 7n-14 \\ -14n+5 & \\ \underline{-14n-14} & \\ 19 & \end{array}$$

В частном получилось $7n-14$, в остатке — 19, следовательно,

$$\frac{7n^2-7n+5}{n+1}=7n-14+\frac{19}{n+1}.$$

Устанавливаем, что $n+1$ — делитель числа 19, причем отличный от единицы, ведь $n+1\geqslant 2$ при натуральных n. Это может быть только само число 19, значит, существует лишь одно решение $n=18$. ►

Задача 6. x и y — натуральные, $3x+7y$ делится на 19. Докажите, что $43x+75y$ делится на 19.

◄ Заметим (ха-ха), что

$$43x+75y=8\underbrace{(3x+7y)}_{\vdots\, 19}+\underbrace{19(x+y)}_{\vdots\, 19}. \qquad (*)$$

Поскольку выражение $43x+75y$ разлагается в сумму двух слагаемых, кратных 19, то оно само делится на 19.

Как можно додуматься до такого решения? Понятно, что если мы умножим на какое-то целое число выражение $3x+7y$ (заведомо кратное 19), то получим также кратное 19 выражение. Далее, если к результату прибавить выражение, скажем, типа $19x$ или $38y$ и т. п., то по-прежнему выражение будет делиться на 19. Значит, нужно подобрать такие целые A, B и C, чтобы было выполнено тождество

$$43x+75y=A(3x+7y)+19Bx+19Cy.$$

Приравнивая коэффициенты, стоящие при x и y в левой и правой частях тождества, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} 3A+19B=43, \\ 7A+19C=75, \end{cases}$$

которую нужно решить в целых числах (точнее говоря, нужно подобрать хотя бы одну тройку целых чисел A, B, C, удовлетворяющую системе). Выразим переменные B и C через A:

$$B = \frac{43-3A}{19} = 2 + \frac{5-3A}{19},$$
$$C = \frac{75-7A}{19} = 4 - \frac{1+7A}{19}.$$

Отсюда понятно, что числа B и C являются целыми, когда числа $5-3A$ и $1+7A$ одновременно делятся на 19. Теперь такое значение A нетрудно подобрать, например, $A = 8$ (существуют и другие варианты). В этом случае $B = 1$ и $C = 1$, и мы получаем тождество $(*)$. ►

Задача 7. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 2 дает остаток 1, при делении на 3 — остаток 2, на 4 — остаток 3, на 5 — остаток 4, на 6 — остаток 5.

◄ Пусть N — искомое число. Прибавим к нему 1, тогда полученное число будет делиться на 2, на 3, на 4, на 5 и на 6. Это следует из приведенных ниже равенств (в левом столбике записаны условия задачи, а в правом — те же равенства, увеличенные на 1, из которых, собственно, и следует данное свойство).

$$\begin{aligned}
N &= 2a+1, \qquad & N+1 &= 2(a+1),\\
N &= 3b+2, & N+1 &= 3(b+1),\\
N &= 4c+3, & N+1 &= 4(b+1),\\
N &= 5d+4, & N+1 &= 5(d+1),\\
N &= 6e+5, & N+1 &= 6(e+1).
\end{aligned}$$

Наименьшее натуральное число, делящееся одновременно на каждое из чисел 2, 3, 4, 5 и 6 равно $\mathsf{НОК}(2,3,4,5,6) = 60$. Итак, $N+1 = 60$, значит, искомое число $N = 59$. ►

Задача 8. Сколько существует натуральных чисел, меньших 100, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

◄ Всего существует 99 натуральных чисел, меньших 100. Найдем, сколько среди них делится на 5 или на 7. Тогда оставшиеся числа дадут требуемое количество. Для этого будет использована следующая

Лемма. Количество чисел, не превосходящих N и делящихся на k, равно $\left[\frac{N}{k}\right]$. (Здесь квадратными скобками обозначена целая часть числа.)

Итак, количество чисел, не превосходящих 99 и кратных 5, равно $\left[\frac{99}{5}\right] = 19$, а кратных 7, равно $\left[\frac{99}{7}\right] = 14$. Верно ли, что $19+14$ даст нам общее количество чисел, которые делятся либо на 5, либо на 7? Нет, неверно. Все дело в том, что некоторые числа учитываются дважды, а именно, числа, кратные $5 \cdot 7 = 35$. Например, число 35 первый раз учитывается как кратное 5, а второй раз — как кратное 7. Таких чисел в первой сотне всего два — это 35 и 70.

Таким образом, существует $\left[\frac{99}{5}\right] + \left[\frac{99}{7}\right] - \left[\frac{99}{35}\right] = 19 + 14 - 2 = 31$ число, делящееся на 5 или на 7. Значит, оставшиеся $99 - 31 = 68$ чисел не делятся ни на 5, ни на 7. ►

Задача 9. Докажите, что $9^{1972} - 7^{1972} \vdots 10$.

◄ Проследим за последними цифрами степеней девятки: $9^1 = \underline{9}$, $9^2 = 8\underline{1}$, $9^3 = 72\underline{9}$, $9^4 = \ldots\underline{1}$, $\ldots$. Получаем, что последние цифры повторяются с периодом 2. Нечетные степени девятки оканчиваются цифрой 9, а четные — цифрой 1. Значит, $9^{1972} = \ldots 1$.

Аналогично, "зацикливаются" последние цифры степеней тройки (см. решение задачи 1, стр. 14). Число 1972 имеет вид $4k$, поэтому $7^{1972} = \ldots 1$.

Мы установили, что обе степени оканчиваются одной и той же цифрой 1, тогда их разность оканчивается нулем. Это означает, что число делится на 10. ►

Задача 10. Сколько чисел, больших 200, но меньших 1000, делятся на 3, но при этом не делятся на 7?

◄ Из чисел от 1 до 999 можно выбрать всего $\left[\frac{999}{3}\right] = 333$ числа, делящихся на 3. Найдем, сколько из них делятся также на 7, т. е. это те числа, которые делятся на $3 \cdot 7 = 21$. Таких чисел $\left[\frac{999}{21}\right] = 47$. Итого $333 - 47 = 286$ чисел делятся на 3, но не делятся на 7. Это еще не ответ. В условии задачи говорится о числах от 201 до 999, а мы рассматривали от 1 до 999. Значит, нужно выкинуть "ненужные" нам числа от 1 до 200. Как и прежде находим, что таких чисел $\left[\frac{200}{3}\right] - \left[\frac{200}{21}\right] = 66 - 9 = 57$.

Таким образом, $286 - 57 = 229$ чисел, больших 200, но меньших 1000, делятся на 3, но не делятся на 7. ►

Математический праздник, II тур

5–6 классы

Задача 1. В магическом квадрате сумма чисел в каждом ряду, колонке и на диагоналях должна быть одинаковой. Найдите число N.

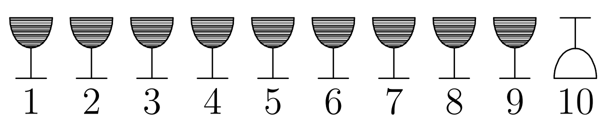
10		
9		13
14	N	

◄ *Ответ.* $N = 7$. В первом столбце сумма чисел равна $10 + 9 + 14 = 33$, значит, в каждой строке, столбце и на диагоналях сумма чисел 33. Дальше все числа легко "достраиваются". Например, во второй строчке стоят числа 9 и 13, недостающее до 33 число равно 11, поэтому в центральной клетке стоит число 11.

Отметим, что для полного решения задачи, нужно не только найти, чему равно N, а заполнить также все пустые клетки квадрата и убедиться, что он действительно является магическим. Должен получиться квадрат, представленный на рисунке справа. ►

10	15	8
9	11	13
14	7	12

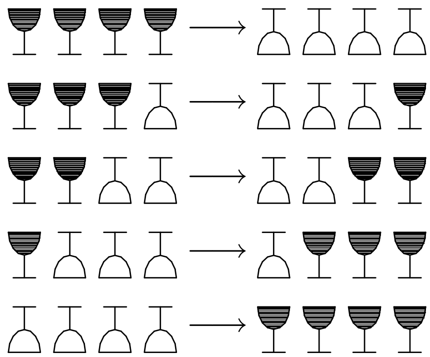
Задача 2. На столе стоят 10 стаканов. Из них 9 стаканов стоят правильно, а один перевернут донышком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые четыре стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?



◄ Задача решается аналогично задаче 2 на стр. 11, предложенной на подготовительной лекции. Посмотрим как изменяется число правильно стоящих стаканов с каждым ходом. Возможны пять вариантов выбора четырех стаканов: среди них могут быть либо все стаканы правильные, либо только три правильных, а один перевернутый, либо два, либо один, либо вовсе не быть. Все возможности представлены ниже на рисунке.

Мы видим, что число правильно стоящих стаканов каждый раз изменяется на четное число, поэтому четность числа правильных стаканов постоянна. Значит, из девяти первоначальных стаканов нельзя сделать десять. ►

Как изменяется число
правильных стаканов



-4

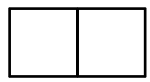
-2

не изменяется

$+2$

$+4$

Задача 3. Прямоугольник состоит из двух одинаковых квадратов, имеющих общую сторону. Его периметр 12 см. Найдите его площадь.

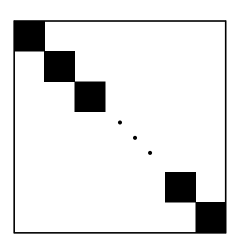


◀ *Ответ.* Площадь равна 8 см^2. Как видно из рисунка, периметр прямоугольника складывается из шести сторон квадратов. Поэтому сторона квадрата равна $12 : 6 = 2$ см, площадь квадрата — 4 см^2, а площадь прямоугольника — $4 + 4 = 8$ см^2. ▶

Задача 4. Введем на шахматной доске 8×8 новую фигуру “хромой конь”. Эта фигура может ходить либо как обычный шахматный конь, либо передвигаться на соседнюю клетку по горизонтали или по вертикали. “Хромой конь” вышел из угловой клетки и за несколько ходов дохромал до противоположной угловой клетки. Докажите, что он сделал четное число ходов.

◀ Заметим, что “хромой конь” каждым своим ходом меняет цвет поля, на которое встает. Это следует из того, что любые две соседние клетки, а также клетки, отстоящие на ход коня, имеют разные цвета. Так что с черной клетки “хромой конь” ходит на белую, а с белой на черную.

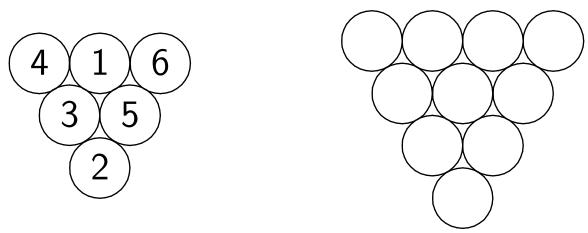
Пусть первоначально фигура стояла, скажем, на черном поле. Через четное число ходов она попадает опять на черное поле, а через нечетное — на белое. Две противоположные угловые клетки шахматной доски одноцветны (посмотрите на рисунок справа: противоположные угловые клетки стоят на одной диагонали). Поэтому свой путь “хромой конь” заканчивает в черной клетке, т. е. совершает четное число ходов. ▶



Задача 5. Малыш может съесть 600 г варенья за 6 мин, а Карлсон — в два раза быстрее. За какое время они съедят это варенье вместе?

◀ За минуту Малыш съедает 600 : 6 = 100 г варенья, а Карлсон — вдвое больше, т. е. 200 г. Вместе они за минуту съедят 300 г варенья, а 600 г — за 600 : 300 = 2 минуты. ▶

Задача 6. На рисунке изображен треугольник из шести кружков, в котором расставлены числа от 1 до 6 так, что каждое число в кружке не первого ряда равно разности чисел в двух кружках, стоящих над ним. Расставьте в треугольнике из десяти кружков числа от 1 до 10, чтобы так же выполнялось указанное свойство.



◀ Существуют четыре различные расстановки чисел (не учитывая симметричные им расстановки). Соответствующие им верхние ряды чисел таковы (по порядку слева-направо): 6 1 10 8, 6 10 1 8, 8 3 10 9, 8 10 3 9. Числа в нижних рядах легко находятся по правилу, описанному в условии задачи. ▶

7 класс

Задача 1. Говорят, что Тортила отдала золотой ключик Буратино не так просто, а вынесла три коробочки. На красной коробочке было написано: “Здесь лежит золотой ключик”, на синей — “Зеленая коробочка пуста”, а на зеленой — “Здесь сидит гадюка”. Тортила прочла надписи и сказала: “Действительно, в одной коробочке лежит золотой ключик, в другой гадюка, а третья пуста, но все надписи неверны”. Где же лежит золотой ключик?

◀ На зеленой коробочке написано, что в ней сидит гадюка, но это неверно, значит, она либо пуста, либо в ней лежит золотой ключик. Но она не может быть пустой, так как на синей коробочке написано неверное утверждение “Зеленая коробочка пуста”. Итак, золотой ключик лежит именно в зеленой коробочке. ▶

Задача 2. На столе выложены карточки, на которых написаны цифры:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{3} & \boxed{3} & \boxed{3} \\ \boxed{5} & \boxed{5} & \boxed{5} \\ \boxed{7} & \boxed{7} & \boxed{7} \\ \boxed{9} & \boxed{9} & \boxed{9} \end{array}$$

Можно ли убрать 12 из них так, чтобы при сложении цифр на оставшихся трех получилось 20?

◀ Заметим, что на карточках написаны только нечетные числа. Поэтому при сложении цифр на оставшихся трех карточках обязательно получится нечетное число, а 20 — число четное. ▶

Задача 3. Какая последняя цифра в записи числа $19^{10} + 98^{10}$? Докажите, что это число составное.

◀ Число 19^{10} оканчивается единицей (см. решение задачи 9, стр. 18). Найдем последнюю цифру числа 98^{10}. Имеем $8^1 = \underline{8}$, $8^2 = 6\underline{4}$, $8^3 = 51\underline{2}$, $8^4 = \ldots\underline{6}$, $8^5 = \ldots\underline{8}$, далее последние цифры степеней восьмерки повторяются с периодом 4. Таким образом, получаем, что

$$8^{4k+1} = \ldots 8, \qquad 8^{4k+2} = \ldots 4, \qquad 8^{4k+3} = \ldots 2, \qquad 8^{4k} = \ldots 6.$$

Число 10 имеет вид $4k + 2$, поэтому $98^{10} = \ldots 4$.

Исходное число $19^{10} + 98^{10}$ оканчивается цифрой $1 + 4 = 5$, следовательно, делится на 5 по признаку делимости. Так что оно является составным числом. ▶

Задача 4. Из куска проволоки согнули прямоугольник, у которого длина вдвое больше ширины. Затем разогнули проволоку и согнули из нее другой прямоугольник с длиной на 10% больше, чем раньше. На сколько процентов уменьшилась его ширина?

◀ Пусть длина и ширина первоначального прямоугольника были равны соответственно $2x$ и x см, где x — какое-то число. 10% от длины прямоугольника составляют $1/10$ часть от числа $2x$, т. е. $0.2x$. Значит, после растяжения прямоугольника его длина стала равна $2x + 0.2x = 2.2x$ (см).

Периметр прямоугольника не изменяется — он равен длине проволоки, следовательно, не меняется также сумма длины и ширины (полупериметр). Для первого прямоугольника эта сумма равна $2x + x =$

$= 3x$ (см). Длина второго прямоугольника — $2.2x$ (см), поэтому его ширина равна $3x - 2.2x = 0.8x$ (см).

Итак, ширина прямоугольника с величины x см уменьшилась до величины $0.8x$ см, т. е. на 20%. ►

Выводные задачи

Задача 5. Винни-Пух, Сова, Кролик и Пятачок съели 70 апельсинов, причем каждому досталось хотя бы по одному апельсину. Винни-Пух съел больше, чем каждый из остальных; Сова и Кролик съели вместе 45 апельсинов. Сколько апельсинов съел Пятачок?

◄ *Ответ.* 1 апельсин. Поскольку Сова и Кролик вместе съели 45 апельсинов, то кто-то из них съел не менее 23 апельсинов, тогда Винни-Пух съел не менее 24 апельсинов. Значит, Сова, Кролик и Винни-Пух съели вместе не менее 69 апельсинов. Но так как Пятачку тоже что-то досталось, то Сова, Кролик и Пух съели вместе ровно 69 апельсинов, а Пятачок — 1 апельсин. ►

Задача 6. При каких натуральных n дробь $\dfrac{n+19}{n-98}$ является целым числом?

◄ *Ответ.* $n = \{59, 85, 89, 95, 97, 99, 101, 107, 111, 137, 215\}$.

Выделяем целую часть дроби

$$\frac{n+19}{n-98} = \frac{(n-98)+117}{n-98} = 1 + \frac{117}{n-98}.$$

Получаем, что $n - 98$ является делителем числа 117 (только в этом случае выражение справа является целым числом). Число $117 = 3^2 \cdot 13$ имеет 6 положительных и 6 отрицательных делителей: ±1, ±3, ±9, ±13, ±39, ±117. Приравнивая выражение $n - 98$ к каждому из них, найдем возможные значения n. Всего получается 12 решений. Но одно из них, именно $n = -19$, не является натуральным, так что в ответ входит только 11 из них. ►

Материалы кружка 5–6-х классов

Занятие 1

Задача 1. Можно ли разменять 25 рублей десятью купюрами достоинством 1, 3 и 5 рублей?

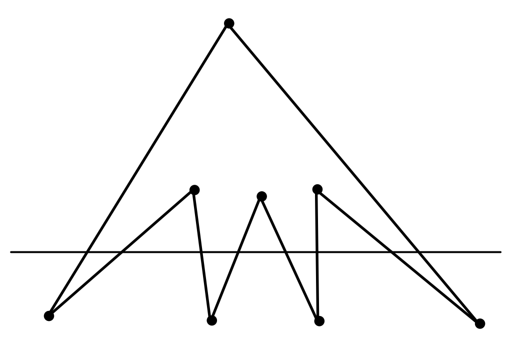
◀ Если мы сложим десять нечетных чисел (в данном случае 1, 3 или 5), то получится четное число. А 25 — число нечетное. Значит, размен невозможен. ▶

Задача 2. Из набора домино выкинули все кости, содержащие пятерку. Можно ли оставшиеся доминошки выложить в цепь по правилам игры?

◀ Первоначально в наборе каждая цифра (число точек на половинках) встречалась 8 раз (см. решение задачи 3 на стр. 12). Мы выкинули следующие кости: $\boxed{5|0}$ $\boxed{5|1}$ $\boxed{5|2}$ $\boxed{5|3}$ $\boxed{5|4}$ $\boxed{5|5}$ $\boxed{5|6}$. Таким образом, вместе с пятерками была выкинута каждая из цифр 0, 1, 2, 3, 4 и 6 по одному разу, так что в результате на оставшихся доминошках цифра 5 вообще не встречается, а цифры 0, 1, 2, 3, 4 и 6 встречаются по 7 раз. Их выложить в цепь уже не получится, ведь в местах стыка двух доминошек цифры разбиваются на пары одинаковых, а без пары могут остаться только две цифры, стоящие на концах цепи. У нас же шесть цифр, и каждая из них входит в набор нечетное число раз. ▶

Задача 3. Может ли прямая пересекать все звенья 11-звенной замкнутой ломаной?

◀ *Первое решение.* Пусть прямая пересекает все звенья замкнутой ломаной. Рассмотрим все вершины, лежащие по одну сторону от нее. Каждой из этих вершин можно поставить в соответствие пару звеньев, из нее выходящих. При этом получим разбиение всех звеньев ломаной на пары. Однако 11 звеньев на пары разбить нельзя, значит, прямая не может пересекать все звенья данной замкнутой ломаной.



Из рисунка видно, что прямая может пересечь все звенья замкнутой ломаной с четным числом звеньев.

Второе решение. Раскрасим все вершины, лежащие по одну сторону от прямой, в белый цвет, а остальные, лежащие по другую сторону, — в черный. Начнем обход ломаной, скажем, с белой вершины в любом направлении. Из белой вершины мы попадем в черную, ведь, двигаясь по звену в соседнюю вершину, мы пересечем прямую и, значит, попадем в другую “половину” плоскости. Далее из черной вершины, аналогично, мы попадем в белую и т. д. Во время обхода белые и черные вершины чередуются. Поскольку мы начали с белой вершины, и обход закончится в той же самой белой вершине, то мы сделаем четное число переходов. Это означает, что наша ломаная состоит из четного числа звеньев. Противоречие. ►

Задача 4. На доске написаны числа 0, 1, 0, 0. За один шаг разрешается прибавлять единицу к любым двум из них. Можно ли, повторяя эту операцию, добиться того, чтобы все числа стали равными?

◄ Первоначально сумма всех четырех чисел на доске равна 1. Каждый раз мы прибавляем по единице к каким-то двум из них, стало быть, сумма всех чисел увеличивается на 2. После первой операции эта сумма равна трем, после второй — пяти и т. д. Значит, она остается все время нечетной. Если бы нам удалось уравнять все числа, то на доске было бы записано: N, N, N, N, где сумма всех чисел равна $4N$, т. е. четна. Следовательно, все числа нельзя сделать равными. ►

Домашнее задание

Задача 1. Учитель написал на листке бумаги число 20. Тридцать три ученика передают листок друг другу, и каждый прибавляет к числу или отнимает от него единицу — как хочет. Может ли получиться в результате число 10?

◄ Если к четному числу 20 прибавить или вычесть единицу 33 раза, то в итоге получится число нечетное. А 10 — четное число, поэтому оно не могло получиться. ►

Задача 2. По кругу расположены 9 шестеренок так, что первая шестеренка сцеплена со второй, вторая — с третьей и т. д., девятая с первой. Могут ли эти шестеренки вращаться?

◄ Заметим, что две соседние шестеренки вращаются в разные стороны: одна по часовой стрелке, другая — против. Пронумеруем шестеренки числами от 1 до 9. Тогда 1-я и 3-я шестеренки будут вращаться в одну сторону. Аналогично, в ту же сторону будут вращаться 5-я, 7-я и 9-я шестеренки. Выходит, соседние шестеренки с номерами 1 и 9 вращаются в одну и ту же сторону. Противоречие. Следовательно, данные шестеренки вращаться не могут. ►

Задача 3. На доске 5×5 расставлены 5 шашек, причем их расположение симметрично относительно диагонали. Докажите, что одна из шашек расположена на диагонали.

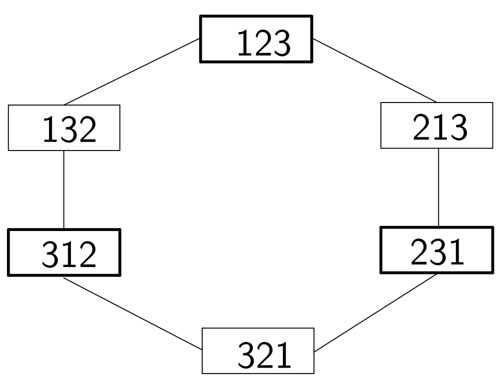
◀ Допустим противное: ни одна из шашек не стоит на диагонали. Тогда все шашки можно разбить на пары так, что в одной паре шашки симметричны относительно данной диагонали. В этом случае должно получиться четное число шашек. А их у нас 5. Это означает, что наше предположение не верно, и какая-то шашка обязательно окажется на диагонали. (Вообще, на диагонали может стоять только нечетное число шашек, т. е. 1, 3 или все 5.) ▶

Задача 4. Можно ли доску размером 5×5 заполнить доминошками размером 1×2?

◀ Если бы данную доску можно было разбить на доминошки, то она состояла бы из четного числа полей (ведь одна доминошка состоит из двух клеток). А в указанной доске нечетное число полей, именно, $5 \cdot 5 = 25$ полей. ▶

Задача 5*. Три блохи играют на прямой в чехарду. Каждый раз одна из них прыгает через свою соседку (но не через двух сразу!). Могут ли они после 11 прыжков оказаться на прежних местах?

◀ *Ответ.* Нет, не могут. Обозначим блох числами 1, 2 и 3. Первоначально блохи на прямой расположены в таком порядке 123 (слеванаправо). После первого прыжка расстановка блох может получиться либо 132, либо 213 (проверьте, что другие расстановки не получаются).



На рисунке в прямоугольниках указаны шесть возможных расстановок, и линией соединены только те пары расстановок, которые получаются друг из друга за один прыжок какой-то блохи. Из этого рисунка видно, что из каждой расстановки за один прыжок можно попасть в две другие (соседние) расстановки.

Назовем расстановки 123, 312 и 231 правильными, а остальные 132, 321 и 213 — неправильными. Через четное число прыжков, как видно из рисунка, расстановка блох становится правильной, а через нечетное число прыжков — неправильной. Таким образом, через 11 прыжков блохи будут находиться в порядке 132, 321 или 213, т. е. не окажутся в начальном положении с расстановкой 123. ►

Занятие 2

Определение. *Магическим квадратом* называется квадратная таблица, в клетках которой расставлены числа таким образом, что сумма чисел в любой строке, столбце и на двух главных диагоналях одна и та же.

Задача 1. В клетках таблицы 3×3 расставить числа от 1 до 9, чтобы получился магический квадрат.

Задача 2. Составить магический квадрат из чисел $1, 3, 5, \ldots, 17$ (берутся все нечетные числа от 1 до 17).

Задача 3. Можно ли из чисел 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26 составить магический квадрат?

Задача 4. Можно ли выписать в ряд по одному разу цифры от 1 до 9 так, чтобы между единицей и двойкой, двойкой и тройкой, ..., восьмеркой и девяткой было нечетное число цифр?

◄ Если между единицей и двойкой расположено нечетное число цифр, то цифры 1 и 2 стоят в ряду на местах одной четности. То же самое можно сказать для двойки и тройки и т. д. Таким образом, если бы цифры от 1 до 9 можно было расставить указанным образом, то все цифры в ряду должны стоять на местах одной и той же четности, что невозможно. ►

Домашнее задание

Задача 1. На озере расцвела лилия. Каждый день число цветков удваивалось, и на 20-й день все озеро покрылось цветами. На который день покрылась цветами половина озера?

◄ *Ответ.* На 19 день. ►

Задача 2. Из книги выпал кусок, первая страница которого имеет номер 328, а номер последней записывается теми же цифрами в каком-то другом порядке. Сколько страниц в выпавшем куске?

◀ *Ответ.* 496 страниц. Если первая страница куска четная, то последняя должна быть нечетной. Единственный вариант — 823. Подсчитаем, сколько всего страниц находится в куске с 328 по 823 страницу: $(823-328)+1 = 496$ страниц. Отметим, что здесь прибавляется единица, потому что при вычитании числа 328, мы вычитаем также первую страницу с номером 328. ▶

Задача 3. В мешке 24 кг гвоздей. Как, имея только чашечные весы, отмерить 9 кг гвоздей?

Задача 4. Составьте из чисел 14, 8, 20, 5, 2, 26, 17, 11, 23 магический квадрат, то есть разместите их в таблице 3×3 так, чтобы суммы чисел по строкам, столбцам и двум диагоналям были одинаковы.

Задача 5. В январе некоторого года было четыре пятницы и четыре понедельника. Каким днем недели было 20-е число этого месяца?

Занятие 3

Задача 1. Сколько сторон и диагоналей в правильном 7-угольнике?

Задача 2. Можно ли, сделав несколько ходов конями из исходного положения, изображенного на рис. 1, расположить их так, как показано на рис. 2?

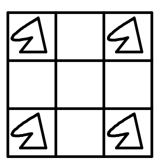


Рис. 1

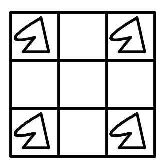


Рис. 2

Задача 3. 100 фишек поставлены в ряд. Разрешается менять местами любые две фишки, стоящие через одну. Можно ли таким способом перегнать фишку с позиции №1 на позицию №100?

Задача 4. Кузнечик прыгал вдоль прямой и вернулся в исходную точку (длина прыжка 1 м). Докажите, что он сделал четное число прыжков.

Задача 5. У марсиан бывает произвольное число рук. Однажды все марсиане взялись за руки так, что свободных рук не осталось. Докажите, что число марсиан, у которых нечетное число рук, четно.

Задача 1. Можно ли соединить 5 городов дорогами так, чтобы каждый город был соединен с тремя другими?

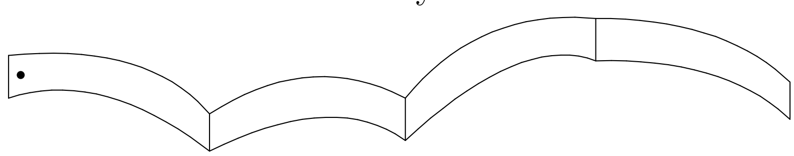
Задача 2. Разрежьте прямоугольник 4×9 на две части, из которых можно составить квадрат.

Задача 3. Найдите сумму чисел $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$.

Задача 4. Можно ли записать 7 целых чисел так, что сумма любых двух соседних чисел положительна, а сумма всех чисел отрицательна?

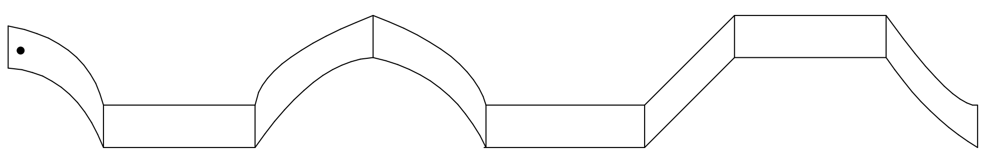
Занятие 4

1. Возьмите длинную полоску бумаги, левый ее конец пометьте точкой. Сверните ее пополам, чтобы точка оказалась закрытой, потом еще пополам (правый конец накладываем на левый). Разверните ее теперь так, чтобы линии сгибов были отчетливо видны и положите на стол. Точка должна быть слева. У вас получилась полоса:



2. Изгибы идут в следующем порядке: вниз–вниз–вверх. Обозначим это так: Н **Н** В .

3. Сложим полоску три раза пополам. Получится полоса:



4. Изгибы идут так: Н Н В **Н** Н В В .

5. Теперь сложите полоску четыре и пять раз и запишите, как будут чередоваться изгибы. Должны получиться цепочки:

Н Н В Н Н В В **Н** Н Н В В Н В В;

Н Н В Н Н В В Н Н Н В В Н В В **Н** Н Н В Н Н В В В Н Н В В Н В В.

Закономерности.

1. Число изгибов нечетное, причем если на каком-то шаге их было k, то на следующем будет $2k + 1$;

2. В середине всегда **Н**, а сгибы до этого среднего **Н** такие же, как и на предыдущем шаге;

3. И, самое главное, буквы, равноудаленные от среднего **Н**, всегда различны.

Следуя этим закономерностям, можно последовательно выписывать коды для полосок, сложенных любое число раз. Общее **правило для перехода от одного кода к другому**:

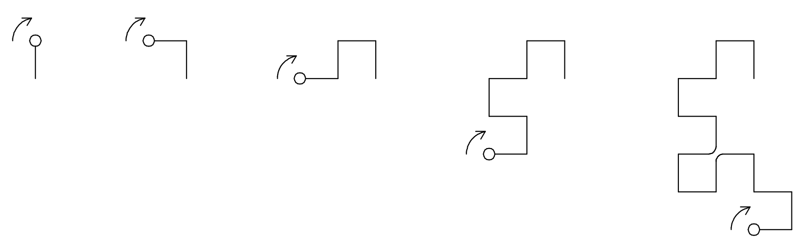
берем имеющийся код, приписываем к нему букву **Н** *(под ней можно поставить точку) и выписываем в обратном порядке буквы, предшествующие этому* **Н**, *заменяя* Н *на* В *и наоборот.*

Заменим теперь в коде Н на Л (левый поворот), а В на П (правый поворот), возьмем лист клетчатой бумаги и проведем вертикальную черточку по стороне одной клетки. Теперь продолжим чертить, следуя командам кода и поворачивая последовательно налево и направо на 90 градусов.

Задания:

1. Нарисуйте кривые, соответствующие одному, двум, трем и четырем складываниям.

2. Попробуйте нарисовать кривую для пяти складываний, используя уже имеющуюся для четырех.



Каждую последующую (по количеству сгибов) кривую можно получить с помощью кальки, поворачивая всю уже имеющуюся кривую на 90 градусов по часовой стрелке вокруг конца этой линии. Этим способом можно строить любые кривые дракона.

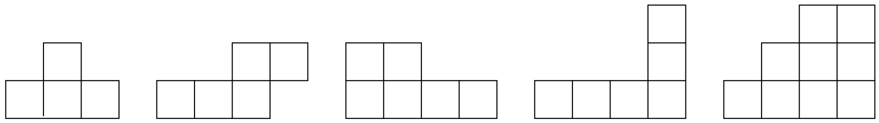
Домашнее задание

1. Постройте кривую, соответствующую шести сгибам полоски, из кривой в пять сгибов и обрисуйте ее контуром дракона.

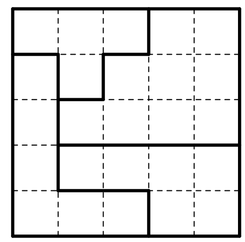
2. Нарисуйте разноцветными карандашами четырех драконов, "вырастающих" из одной точки (первая черточка для одного идет вверх, у второго — влево, у третьего — вниз, а у четвертого — вправо). Эти драконы получаются из исходного при помощи трех последовательных поворотов на 90 градусов. Драконы не пересекаются и последовательно заполняют весь лист бумаги.

Занятие 5

Задача 1. Используя четыре из пяти нарисованных ниже фигур, можно составить квадрат. Какая фигура является при этом лишней?



◀ У нас в распоряжении 5 фигур, составленных соответственно из 4, 5, 6, 6 и 9 клеток. Всего $4+5+6+6+9 = 30$ клеток. Если мы выкинем самую "большую" фигуру, то останется $30 - 9 = 21$ клетка. Если же выкинуть самую "маленькую" — останется $30 - 4 = 26$ клеток.



Итак, число клеток искомого квадрата лежит в пределах от 21 до 26. Это число должно являться квадратом натурального числа, значит, это 25. Следовательно, надо выкинуть фигуру из $30-25 = 5$ клеток. Справа на рисунке показано, как из оставшихся фигур сложить квадрат 5×5. ▶

Задача 2. Докажите, что из натуральных чисел от 1 до 100 нельзя выбрать 71 число так, чтобы их сумма равнялась сумме остальных чисел.

◀ Разобьем числа на две группы: первая — из 71 числа, вторая — из остальных 29 чисел. Покажем, что при любом таком разбиении сумма чисел первой группы всегда больше суммы чисел второй. Действительно, наименьшая возможная сумма 71 числа равна

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 71 = 2556$$

(как найти такую сумму, см. решение задачи 3 на стр. 29). Наибольшая возможная сумма 29 чисел равна

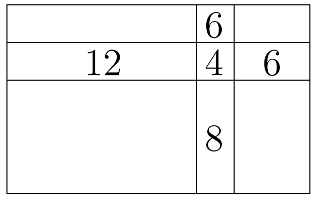
$$72 + 73 + 74 + \ldots + 100 = 2494.$$

Выходит, в первой группе сумма чисел не меньше 2556, а во второй — не больше 2494, так что эти суммы не могут быть равными. ▶

Задача 3. Можно ли числа от 1 до 10 разбить на две группы по 5 чисел так, чтобы суммы чисел в обеих группах были одинаковы?

◀ *Ответ.* Нельзя. Если бы числа можно было разбить на две группы с одинаковой суммой, то сумма всех чисел была бы четной. Однако $1 + 2 + \ldots + 10 = 55$ — нечетное число. ▶

Задача 4. Прямоугольник разделен на 9 меньших прямоугольников, для пяти из которых периметры записаны внутри каждого из них. Чему равен периметр большого прямоугольника?



◀ *Ответ.* $12 + 6 + 6 + 8 - 4 = 28$. Если сложить периметры прямоугольников, прилегающих к сторонам большого прямоугольника, то, как нетрудно убедиться, будут учтены все стороны большого прямоугольника плюс стороны внутреннего прямоугольника с периметром 4. Поэтому из полученной суммы нужно еще вычесть 4, что даст приведенный выше ответ. ▶

Задача 5. Последовательность чисел начинается цифрами 1 и 3. Каждое следующее число в последовательности является последней цифрой суммы двух предыдущих членов. Какое число стоит на 1000-м месте?

◀ *Ответ.* Цифра 7. Выпишем несколько первых членов последовательности:

$$\underbrace{1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 1,\ 8,\ 9,\ 7,\ 6,\ 3,\ 9,\ 2}_{\text{12 чисел в периоде}},\ \underbrace{1,\ 3,\ \ldots}$$

Видим, что в последовательности снова встретились цифры 1 и 3, которые стоят в начале, поэтому далее цифры будут повторяться с периодом в 12 цифр. В первую тысячу цифр укладывается 83 таких периода и еще остается 4 цифры, ведь $1000/12 = 83\,(\text{ост. } 4)$. Отсчитываем четвертую цифру в периоде — это семерка. ▶

Теорема. *Квадрат натурального числа имеет нечетное количество делителей (включая 1 и само это число). Любое другое натуральное число (т. е. не являющееся точным квадратом) имеет четное количество делителей.*

Доказательство основывается на том факте, что все делители натурального числа разбиваются на пары. Если d — делитель числа N, то N/d — тоже его делитель. Делитель останется без пары, если только $d = N/d$, т. е. $N = d^2$ — квадрат натурального числа.

Например, число 12 имеет делители 1, 2, 3, 4, 6, 12, которые разбиваются на пары равноотстоящих от концов чисел: $1 \leftrightarrow 12$, $2 \leftrightarrow 6$, $3 \leftrightarrow 4$. Произведение чисел в каждой паре равно самому числу 12.

Число 36 (квадрат) имеет делители 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36, образующие следующие пары: $1 \leftrightarrow 36$, $2 \leftrightarrow 18$, $3 \leftrightarrow 12$, $4 \leftrightarrow 9$ и число 6 остается без пары, ведь $36 = 6^2$.

Задача 6. Число A имеет 5 делителей, а число B — 7 делителей. Может ли произведение AB иметь ровно 10 делителей?

◀ Согласно теореме A и B являются квадратами натуральных чисел: $A = a^2$, $B = b^2$. Следовательно, $AB = a^2b^2 = (ab)^2$ — тоже квадрат, значит, имеет нечетное число делителей (естественно, не равное 10). ▶

Задача 7. Приведите пример числа, которое имеет ровно 7 делителей.

◀ Теорема подсказывает, что такие числа нужно искать среди квадратов. Попробуем: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 ... Ага! Число 64 подходит. Оно имеет делители 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 — всего семь штук. ▶

Домашнее задание

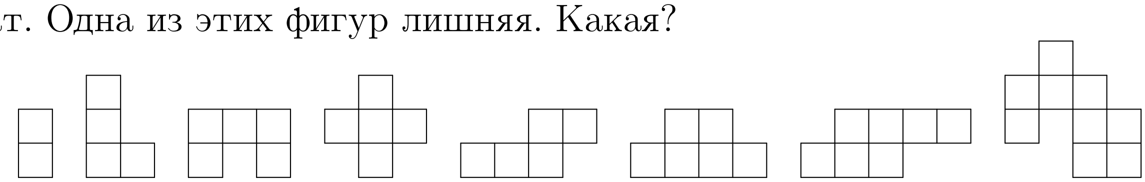
Задача 1. Директор завода, рассматривая список телефонных номеров и фамилий своих сотрудников, заметил определенную взаимосвязь между фамилиями и номерами телефонов. Вот некоторые фамилии и номера телефонов из списка:

Ачинский 8111
Бутенко 7216
Галич 5425
Лапина 6131
Мартьянов 9143

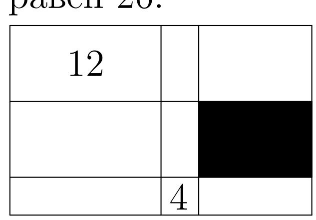
Какой номер телефона у сотрудника по фамилии Огнев?

◀ Первая цифра телефона равна количеству букв в фамилии, а три оставшиеся — порядковым номерам в алфавите первой и последней букв фамилии. Отсюда следует, что телефон Огнева — 5163. ▶

Задача 2. Из семи приведенных ниже фигур можно составить квадрат. Одна из этих фигур лишняя. Какая?



Задача 3. Прямоугольник разбит на несколько меньших прямоугольников, в двух из которых записаны их периметры. Найти периметр заштрихованного прямоугольника, если известно, что периметр большого прямоугольника равен 26.



◀ *Ответ.* $26 - 12 - 4 = 10$ кв. ед. ▶

Задача 4. В небольшом шотландском городке стояла школа, в которой учились ровно 100 школьников. У каждого из них был шкаф для одежды — ровно 100 шкафов, причем шкафы были пронумерованы числами от 1 до 100. А еще в этой школе жили привидения — ровно 100 привидений. Каждый школьник, уходя из школы, запирал свой шкаф, а ночью привидения начинали играть со шкафами, то отпирая, то запирая их.

Однажды вечером школьники, как обычно, оставили запертыми все шкафы. Ровно в полночь появились привидения. Сначала первое привидение открыло все шкафы; затем второе привидение закрыло те шкафы, номер которых делился на 2; затем третье привидение поменяло позиции (т. е. открыло шкаф, если он был закрыт, и закрыло — если он был открыт) тех шкафов, номер которых делился на 3; следом за ним четвертое привидение поменяло позиции тех шкафов, номер которых делился на 4, и т. д. Как только сотое привидение поменяло позицию сотого шкафа — пропел петух, и все привидения срочно убрались восвояси.

Не скажете ли Вы, сколько осталось открытых шкафов после посещения привидений?

◀ Если номер шкафа c является точным квадратом, то все его делители разбиваются на пары, дающие в произведении c. Такой шкаф поменяет позицию четное число раз и в итоге окажется закрытым. Если же номер шкафа c является точным квадратом, то число его различных делителей будет нечетно, и шкаф в итоге окажется открытым. Количество точных квадратов среди первой сотни — 10. Значит, и открытых шкафов будет 10, а закрытых — 90. ▶

Задача 5. Последовательность начинается числами 2 и 3. Каждый следующий член последовательности определяется как последняя цифра произведения двух предыдущих. Какое число стоит на 1998-м месте?

Задача 6*. Натуральное число имеет ровно 11 делителей. Докажите, что оно больше 1000.

◀ *Указание.* Попробуйте доказать, что такое число имеет только один простой делитель. ▶

Занятие 6

Задача 1. Докажите, что произведение двух последовательных целых чисел является числом четным.

Задача 2. Верно ли, что произведение трех последовательных целых чисел всегда делится на 6?

Задача 3. Докажите, что $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
(Метод складывания чисел с концов и метод кубиков.)

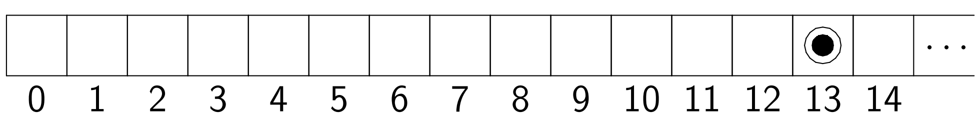
Задача 4. Вычислите сумму $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)$.

▸ **Определение.** *Средним арифметическим* нескольких чисел $a_1, a_2, \ldots,$ a_n называется число
$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Задача 5. Среднее арифметическое десяти чисел равно 20. Если одно из чисел убрать, среднее арифметическое оставшихся будет равно 19. Найдите убранное число.

Задача 6. Бывают ли натуральные числа, произведение цифр которых равно 1998?

Задача 7. (Игра “Поставь на ноль”). Клетки полоски клетчатой бумаги занумерованы числами 0, 1, 2, 3, ... , как показано на рисунке. На одной из клеток стоит фишка. Двое играющих по очереди передвигают фишку влево на одну, две, три или четыре клетки. Проигрывает тот, кому некуда ходить (значит, выигрывает тот, кто поставил фишку на ноль). При каком начальном положении фишки выигрывает начинающий, а при каком его партнер?



Домашнее задание

Задача 1. Докажите, что произведение четырех последовательных целых чисел кратно 24.

Задача 2. Вычислите $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n$.

Задача 3. Играют двое. Один называет любое целое число от 1 до 9 включительно. Второй прибавляет к названному числу любое целое число от 1 до 9, какое захочет, и называет сумму. К этой сумме первый снова прибавляет любое целое число от 1 до 9 и называет новую сумму и т. д. Выигрывает тот, кто раньше назовет число 100. Кто победит в этой игре?

Задача 4. Существует ли целое число, произведение цифр которого равно 2835?

Занятие 7

Обозначение. $n!$ — сокращенная запись произведения последовательных чисел от 1 до n включительно; например, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$.

$n!$ читается «эн факториал»,

$5!$ читается «пять факториал».

Задача 1. Определите, какой цифрой оканчивается число $7!$.

Задача 2. Известно, что $n! \cdot 6 = 6!$. Чему равно n?

Рассмотрим ряд чисел

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots,$$

в котором первые два числа равны 1, а каждое следующее число равно сумме двух предыдущих. Такая последовательность чисел называется *рядом Фибоначчи.*

Последние цифры ряда Фибоначчи

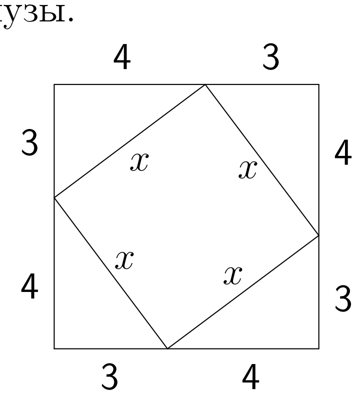
1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7, 0, 7, 7, 4, 1, 5, 6, 1, 7, 8, 5, 3, 8, 1, 9, 0, 9, 9, 8, 7, 5, 2, 7, 9, 6, 5, 1, 6, 7, 3, 0, 3, 3, 6, 9, 5, 4, 9, 3, 2, 5, 7, 2, 9, 1, 0, 1, 1, 2, . . .

Задача 3. Какой цифрой оканчивается 1000-е число Фибоначчи?

Задача 4. Закономерности. а) Числа Фибоначчи, имеющие номер, кратный 15, оканчиваются на 0 и, значит, делятся на 10.

б) Каждое пятое число Фибоначчи делится на 5.

Задача 5. В прямоугольном треугольнике катеты равны 3 и 4. Определите длину гипотенузы.

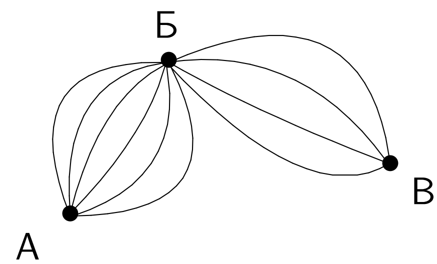


Комбинаторика

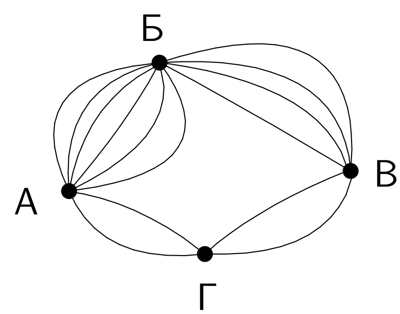
Задача 6. В магазине "Все для чая" есть 5 разных чашек и 3 разных блюдца. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем?

Задача 7. В магазине "Все для чая" есть еще 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить комплект из чашки, блюдца и ложки?

Задача 8. В Стране Чудес есть три города: А, Б и В. Из города А в город Б ведет 6 дорог, а из города Б в город В — 4 дороги (см. рис.). Сколькими способами можно проехать от А до В?



Задача 9. В Стране Чудес построили еще один город — Г и несколько новых дорог (см. рис.). Сколькими способами можно теперь добраться из города А в город В?



Задача 10. В магазине "Все для чая" по-прежнему продается 5 чашек, 3 блюдца и 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить два предмета с разными названиями?

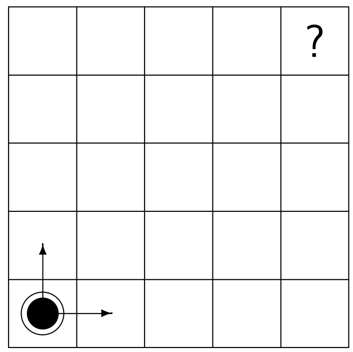
Задача 11. Назовем натуральное число "симпатичным", если в его записи встречаются только нечетные цифры. Сколько существует 4-значных "симпатичных" чисел?

Задача 12. (Устно). а) В киоске "Союзпечать" продаются 5 видов конвертов и 4 вида марок. Сколькими способами можно купить конверт с маркой?

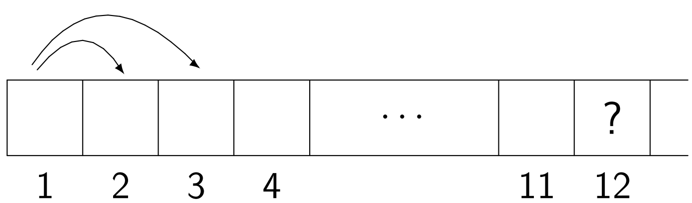
б) Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова "КРУЖОК"?

в) Сколько существует 4-значных чисел, все цифры которых имеют одинаковую четность?

Задача 13. В левом нижнем углу шахматной доски 5×5 стоит фишка. За один ход фишку разрешается передвинуть на одну клетку вправо или вверх. В каждой клетке записывается число способов передвинуть фишку из начального положения в данную клетку. Какое число записано в правом верхнем углу?



Задача 14. Заяц прыгает в одном направлении по разделенной на клетки полосе. За один прыжок он может сместиться либо на одну, либо на две клетки. Сколькими способами может заяц добраться с 1-й клетки на 12-ю?



Домашнее задание

Задача 1. Рыбак от озера прошел на север 6 км, затем повернул на запад и прошел 12 км, после чего повернул на юг и прошел еще 1 км. На каком расстоянии от начала пути он находится?

Задача 2. а) Определите, какой цифрой оканчивается 1999!.

б) Складывая факториалы последовательных чисел

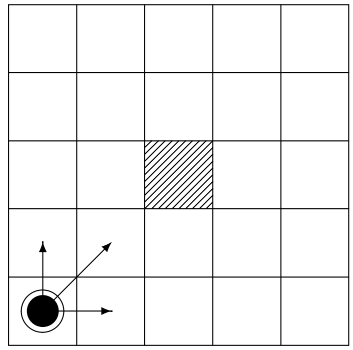
$$1! + 2! + 3! + \dots ,$$

усердный школьник надеется достигнуть суммы ровно в один миллион.

Увы! Его надежды и усилия тщетны. Докажите это.

Задача 3. а) Фишка стоит в левой нижней клетке доски 5×5 и может передвигаться в трех направлениях, показанных на рисунке. Сколькими способами она может пройти в верхнюю правую клетку?

б) А сколько существует путей, для которых фишка не проходит через заштрихованную клетку?



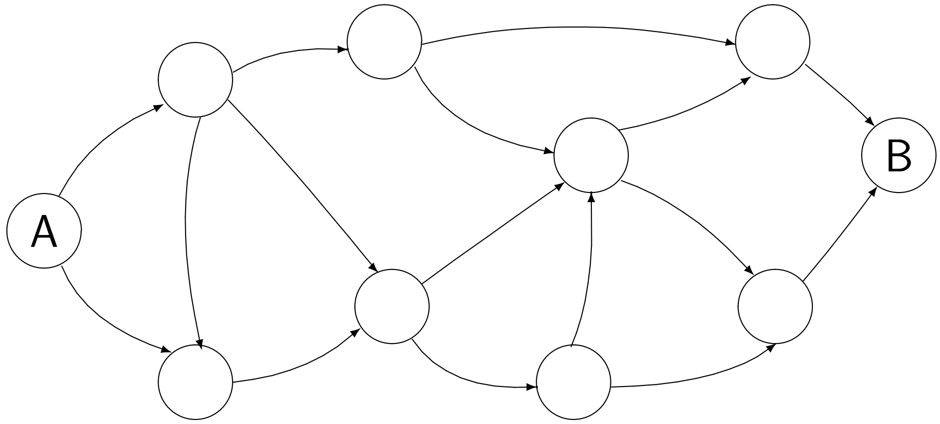
Задача 4. Попугай Иннокентий знает следующие слова: филин, кот, таракан, поет, бежит, стучит, спит, говорливый, мудрый, усатый. Он может произносить такие фразы:

$$\boxed{\text{ПРИЛАГАТЕЛЬНОЕ}} + \boxed{\text{СУЩЕСТВИТЕЛЬНОЕ}} + \boxed{\text{ГЛАГОЛ}}.$$

Например, "Мудрый таракан поет". Сколько разных фраз может сказать Кеша?

Задача 5. Пусть N — 111-е число в ряду Фибоначчи. Какое наименьшее натуральное число нужно вычесть из N, чтобы получилось число, кратное 5?

Задача 6. 10 городов соединены дорогами с односторонним движением (см. рисунок). Сколькими способами можно проехать из города A в город B?

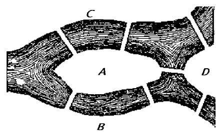


Задача 7*. Все поля шахматной доски 8×8 покрыли 32-мя косточками домино. Каждая косточка закрывает в точности два поля. Дока-

жите, что при любом покрытии число вертикально лежащих косточек четно и число горизонтально лежащих косточек тоже четно.

Задача 8. Число называется *симметричным*, если оно читается одинаково слева-направо и справа-налево, например, 18581. Сколько существует 5-значных симметричных чисел, т. е. имеющих вид $\overline{abcba}$?

Задача 9. Задача Эйлера. На реке, протекающей через город Кёнигсберг и омывающей два острова, имеется семь мостов (см. рис.). Может ли пешеход совершить такую прогулку, чтобы за один раз обойти все мосты, пройдя по каждому только один раз?



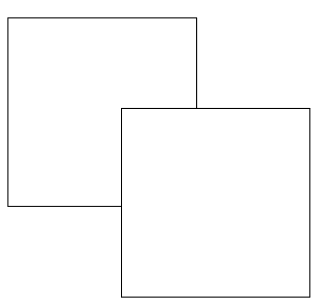
Задача 10. Эта старинная задача была известна еще в Древнем Риме. Богатый сенатор, умирая, завещал, что если его беременная жена разрешится мальчиком, то мальчик должен унаследовать 2/3 имущества, а жена 1/3; если же родится девочка, она получит 1/3, а жена 2/3; однако родилась двойня — мальчик и девочка. Как распределить завещанное имущество?

Занятие 8

Разминка

Задача 1. Какая из дробей $\frac{16}{20}$, $\frac{27}{36}$, $\frac{60}{72}$ ближе всего к 1?

Задача 2. На стол бросили два квадрата 5 см × 5 см, как показано на рисунке. Они покрыли площадь стола, равную 43 см^2. Какова площадь их перекрытия?



Последняя цифра целого числа

Задача 3. Найдите последнюю цифру чисел 2^{100} и 777^{777}.

Задача 4. Докажите, что число $23^{23} + 8$ делится на 5.

Задача 5. Верно ли, что число $921 \cdot 922 \cdot 923 + 924$ делится на 30?

Комбинаторика

Задача 6. Сколько существует различных трехзначных чисел, в записи которых участвуют лишь цифры 1, 2, 3 и 4?

Задача 7. Среди чисел из задачи 6 сколько существует таких, в записи которых цифры не повторяются?

Задача 8. Монету бросают трижды. Сколько разных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?

Задача 9. Каждую клетку квадратной таблицы 2×2 можно покрасить в черный или белый цвет. Сколько существует различных раскрасок этой таблицы?

Задача 10. В футбольной команде из 11 человек нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 11. Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трех букв А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более, чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо?

Указание. Сосчитайте отдельно количества одно-, двух-, трех- и четырехбуквенных слов.

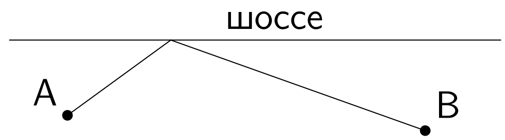
Геометрия на прямой

Задача 12. На прямой расположено пять точек — A, B, C, D, E (именно в таком порядке). Известно, что $AB = 19$ см, $CE = 99$ см, $AC = BD$. Найдите длину отрезка DE.

▸ **Утверждение.** Кратчайшим путем между двумя точками является отрезок прямой.

Задача 13. От Петербурга до Москвы 660 км, от Петербурга до деревни Лыково — 310 км, от Лыково до Клина — 200 км, и от Клина до Москвы — 150 км. Каково расстояние от Лыково до Москвы?

Задача 14. Грибник выходит из леса в заданной точке. Ему надо дойти до шоссе, которое представляет собой прямую линию, и зайти обратно в лес в другой заданной точке. Как ему сделать это, пройдя по самому короткому пути?



Домашнее задание

Задача 1. Сколькими способами можно заполнить одну карточку в лотерее "Спортпрогноз"? (В этой лотерее нужно предсказать итог тринадцати спортивных матчей. Итог каждого матча — победа одной из команд или ничья; счет роли не играет.)

Задача 2. Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя шести различных цветов?

Задача 3. Докажите, что $9^{2000} - 7^{2000} \vdots 10$.

Задача 4. Буратино и Мальвина по очереди ломают шоколадку 6×8. За ход разрешается сделать один прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет?

Занятие 9

Повторение

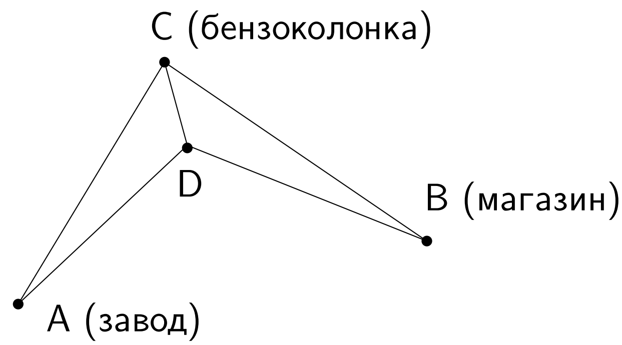
Задача 1. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладьи так, чтобы они не били друг друга?

Задача 2. Как изменится ответ, если в предыдущей задаче обе ладьи черные?

Задача 3. Петя купил общую тетрадь объемом 96 листов и пронумеровал все ее страницы по порядку числами от 1 до 192. Вася вырвал из этой тетради 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. Могло ли у него получиться 1990?

Задача 4. Сколько существует 4-значных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

Задача 5. От завода игрушек (A) до магазина (B) самый короткий путь проходит через деревню D. Организовывая перевозку очередной партии игрушек, водитель Адам Козлевич заметил, что ему не хватит бензина, чтобы доехать до магазина. Неподалеку от деревни в пункте C находится бензоколонка. Водитель может ехать по маршруту A–C–B или из деревни заехать на бензоколонку A–D–C–D–B. Какой путь короче?



Исследовательская задача

Задача 6. *Сколько клеток пересекает диагональ в клетчатом прямоугольнике $m \times n$?*

Диагональ пересекает клетку, если она проходит через ее внутреннюю точку. Обозначим число клеток, которые пересекает диагональ, символом $K_{m\times n}$.

а. Если диагональ не проходит через узлы сетки, то $K_{m\times n} = m+n-1$.

б. Если диагональ проходит через k узлов, то $K_{m\times n} = (m+n-1)-k$.

в***.** Число узлов, через которые проходит диагональ, равно

$$k = \text{НОД}(m, n) - 1.$$

г. Для любых m и n верна формула $K_{m\times n} = m+n-\text{НОД}(m, n)$.

Вопрос. Сколько клеток пересекает диагональ в клетчатом прямоугольнике размерами 199×991? 199×995?

Математический хоккей

Задача 1. Средний возраст одиннадцати игроков футбольной команды в начале матча был 22 года. В течении игры получил красную карточку и был удален с поля один из игроков. После чего средний возраст команды стал равен 21 году. Сколько лет удаленному игроку?

Задача 2. В прямоугольной таблице расставлены числа. После того, как сосчитали суммы чисел по строкам и по столбцам, оказалось, что все эти суммы равны между собой. Докажите, что таблица на самом деле была квадратной.

Задача 3. Дано трехзначное число $\overline{\mathsf{ABB}}$, произведение цифр которого — двузначное число $\overline{\mathsf{AC}}$, произведение цифр этого числа равно C (здесь, как в математических ребусах, цифры в записи числа заменены буквами; одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные). Определите исходное число.

Задача 4. Учитель задал на уроке замысловатую задачу. В результате количество мальчиков, решивших эту задачу, оказалось равным количеству девочек, не решивших ее. Кого в классе больше — решивших задачу или девочек?

Задача 5. После того, как в числе зачеркнули одну цифру оно уменьшилось в 31 раз. Какое это число и какую цифру зачеркнули? (Найдите хотя бы одно число.)

Задача 6. Дорога от дома до школы занимает у Пети 20 мин. Однажды по дороге в школу он вспомнил, что забыл дома ручку. Если теперь он продолжит свой путь с той же скоростью, то придет в школу за 3 мин до звонка, а если вернется домой за ручкой, то, идя с той же скоростью, опоздает к началу урока на 7 мин. Какую часть пути он прошел до того, как вспомнил о ручке?

Задача 7. Кого больше: котов, кроме тех котов, которые не являются Васьками, или Васек, кроме тех Васек, которые не являются котами?

Материалы кружка 7-го класса

Занятие 1

Задача 1. Наташа произнесла истинное утверждение. Леша повторил его дословно, но оно оказалось неверным. Что сказала Наташа?

Задача 2. Разгадайте ребус $?^2$.

Задача 3. Математик получил приглашение на званый обед. Он ответил запиской : "Са!" Что он ответил?

Задача 4. Решите в целых числах уравнения:
а) $(\overline{xx} + \overline{yy}) \cdot xy = 1980$;
б) $(x - 2y)(x + y) = 4$;
в) $x^2 - 4y^2 = 104$.

Задача 5. Клетки квадратной таблицы 15×15 раскрашены в красный, синий и зеленый цвета. Докажите, что найдутся по крайней мере две строки, в которых клеток хотя бы одного цвета поровну.

Задача 6. На балу каждый кавалер танцевал с тремя дамами, а каждая дама с тремя кавалерами. Докажите, что кавалеров и дам было одинаковое число.

Задача 7. На столе лежат 3 черные палочки разной длины, причем сумма их длин 30 см, и 5 белых палочек, сумма длин которых тоже 30 см. Можно ли распилить те и другие палочки так, чтобы потом расположить их парами, в каждой из которых длины палочек одинаковые, а цвета разные.

Задача 8. Докажите: $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \ldots + \dfrac{n-1}{n!} = 1 - \dfrac{1}{n!}$.

Задача 9. Постройте треугольник по стороне, высоте и медиане, проведенными к этой стороне.

Домашнее задание

Задача 1. Докажите, что если $5x + 8y \,\vdots\, 19$, то и $2x + 7y \,\vdots\, 19$.

◀ Выражение $7(5x + 8y) - 8(2x + 7y) = 19x$ делится на 19. Кроме того, из условия $7(5x + 8y) \,\vdots\, 19$, значит, $8(2x + 7y) \,\vdots\, 19$. Поскольку числа 8 и 19 взаимно просты, то $2x + 7y \,\vdots\, 19$. ▶

Задача 2. Докажите, что при всех натуральных значениях n число $n(n+2)(n+7) \vdots 6$.

Задача 3. Найдите сумму всех двузначных чисел, больших 40.

Задача 4. Найдите сумму $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{87\cdot 99}$.

Задача 5. Сколько существует трехзначных чисел, кратных 7?

Задача 6. Докажите, что $2n+1$ и $3n+1$ взаимно простые числа при любом натуральном n.

Задача 7. Разделите угол в 19° на 19 равных частей.

Задача 8. Докажите, что $2^{2^{1987}}-1 \vdots 3$.

Задача 9. В одну строчку выписали 25 чисел. Сумма двух любых соседних чисел положительна. Может ли при этом сумма всех 25 чисел быть отрицательной?

Занятие 2

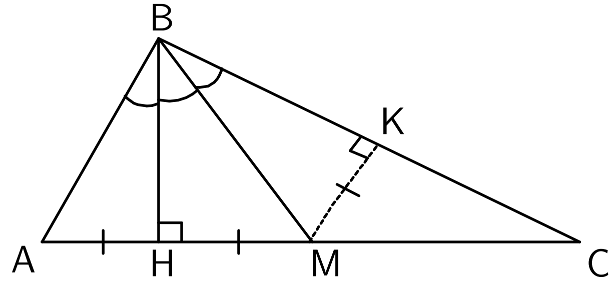
"Существует еще одна причина, по которой математику надлежит ценить высоко: именно математика придает естественным наукам степень достоверности, недостижимую без нее".

Альберт Эйнштейн

"Каждая задача, которую я решал, становилась правилом, служившим впоследствии для решения других задач". *Рене Декарт*

Задача 1. Из вершины B треугольника ABC проведены медиана и высота, которые разделили $\angle ABC$ на три равные части. Определите углы треугольника ABC.

◀ В $\triangle ABC$ высота BH является также биссектрисой, поэтому этот треугольник равнобедренный и $AH = HM$. Опустим из точки M перпендикуляр MK на сторону BC. Тогда $\triangle BMH = \triangle BMK$ (по общей гипотенузе и острому углу), следовательно, $HM = MK$.



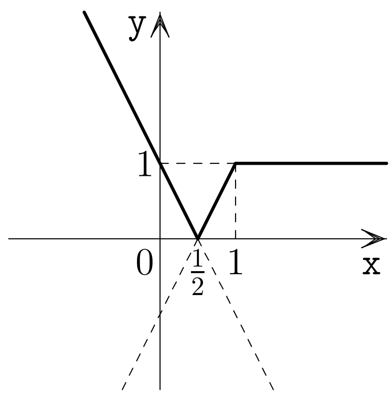
Имеем $MC = AM = 2HM = 2MK$, т. е. в прямоугольном треугольнике MCK гипотенуза MC в 2 раза больше катета MK. Значит, $\angle MCK = 30°$. Из $\triangle BHC$ находим $\angle HBC = 60° \Rightarrow \angle B = 90°$. Итак, в $\triangle ABC$ углы таковы: $\angle A = 60°$, $\angle B = 90°$, $\angle C = 30°$. ▶

Задача 2. Постройте график $y = \big||x-1| - x\big|$.

◀ **I случай** $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ y = 1. \end{cases}$ **II случай** $\begin{cases} x < 1, \\ y = |1-2x|. \end{cases}$

$$\begin{cases} x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ y = 1 - 2x. \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2} < x < 1, \\ y = 2x - 1. \end{cases}$$

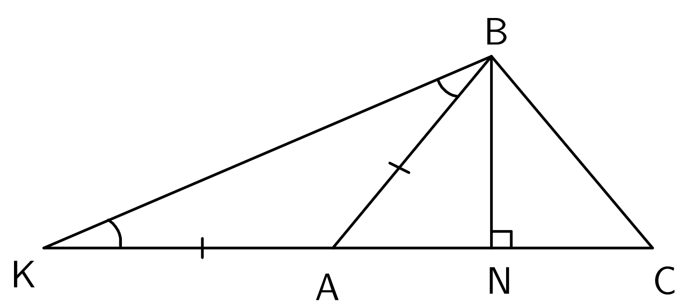
График состоит из кусков трех прямых (см. чертеж). ▶



Задача 3. Постройте равнобедренный треугольник по данному периметру и высоте, опущенной на основание.

◀ Пусть в треугольнике ABC дана высота BN и периметр $p = AB + BC + AC$. Поскольку BN — также медиана, то $AB + AN = BC + NC = \dfrac{1}{2}p$.

Анализ. Допустим $\triangle ABC$ построен. Отложим на продолжении стороны CA за точку A отрезок AK, равный AB. Тогда $NK = AK + AN = AB + AN = \dfrac{1}{2}p$. Треугольник KAB — равнобедренный, поэтому $\angle K = \angle ABK$.



План построения. Строим прямоугольный треугольник BNK по двум катетам (BN дан, а NK равен половине отрезка p). От луча

BK откладываем $\angle KBA$, равный $\angle K$, получаем точку A. Точка C симметрична A относительно N.

Построение возможно, если $\angle KBA < \angle KBN$, в противном случае точка A "уедет" за пределы катета KN. Учитывая, что в любом треугольнике против бо́льшего угла лежит бо́льшая сторона, получаем, что для этого должно выполняться $BN < KN$, т. е. данная высота меньше полупериметра. ►

Задача 4. Имеются 12 ящиков. В некоторых из них лежат по 12 ящиков меньшего размера; в некоторых из меньших ящиков лежат еще 12 ящиков меньшего размера. Всего заполнено 39 ящиков. Найдите общее число ящиков.

◄ В задаче говорится о ящиках трех размеров, поэтому дадим им условные названия: "большие", "средние", "малые". Пусть заполнено x больших ящиков и y средних (в малых ящиках ничего не лежит). Тогда по условию $x+y=39$. Подсчитаем общее число ящиков: больших всего 12, средних $12x$ и малых $12y$. Итого $12+12x+12y=12+12(x+y)=$ $=12+12\cdot 39=480$ ящиков. ►

Задача 5. Президент Анчурии устроил пресс-конференцию по случаю своего дня рождения. Собравшиеся журналисты были знакомы друг с другом и все обменялись рукопожатиями. Когда вошел президент, он обменялся рукопожатиями с теми журналистами, с которыми был знаком. В результате всего было сделано 80 рукопожатий. Сколько было журналистов и со сколькими из них был знаком президент?

◄ Пусть на конференции собралось n журналистов. Подсчитаем сколько они сделали друг с другом рукопожатий. Каждый из n журналистов пожал руку $n-1$ своим коллегам. Получаем $n(n-1)$ рукопожатий, но в этом произведении каждое рукопожатие учтено дважды (например, когда 1-ый журналист поздоровался со 2-ым, мы учитываем это рукопожатие один раз, в то же время 2-ой пожал руку 1-му — учитываем второй раз). Таким образом, между журналистами было сделано $\dfrac{n(n-1)}{2}$ рукопожатий.

Вошел президент и сделал не более n рукопожатий. Значит, нужно подобрать значение n такое, чтобы число $\dfrac{n(n-1)}{2}$ не превосходило 80 и отличалось от него не более чем на n. При $n=14$ получаем $14\cdot 13/2=$ $=91$ рукопожатий, что больше 80. Значение $n=13$ — подходящее: $13\cdot 12/2=78$, до 80 не хватает 2. При $n=12$ число $n(n-1)/2$ равно 66 и до 80 не хватает 14, а это больше числа журналистов. При $n<12$ разница станет еще больше.

Итак, на конференцию пришло 13 журналистов, и с двумя из них был знаком президент. ►

Задача 6. Вася купил две игрушки “тамагочи” — растущих электронных зверьков. Первый бодрствует с 7 до 22 часов, каждые 3 часа “взрослея” на 1 год. Остальное время он спит, “взрослея” на год за 6 часов. Второй зверек “взрослеет” за каждые четыре часа, независимо от времени суток, на год.

Вася одновременно включил обе игрушки. Оказалось, что трехлетнего возраста оба зверька достигли одновременно. Кому из них раньше исполнится 5 лет?

◄ Попытаемся определить момент времени, в который были включены “зверьки”. Так как они были включены одновременно и одновременно достигли трехлетнего возраста, то для первого зверька можно написать уравнение $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6}=3$. Здесь x — продолжительность “дневного” времени, т. е. времени от 7 до 22 часов, y — продолжительность “ночного” времени за период достижения “трехлетнего” возраста. Для второго зверька уравнение будет проще: $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{4}=3$, или $x+y=12$. Первое уравнение можно переписать в виде $2x+y=18$. Если из этого уравнения вычесть второе, то мы получим $x=6$. Очевидно, что и $y=6$. Поскольку продолжительность как ночного, так и дневного времени в сутках больше 6 часов, то включение зверьков могло произойти только в два момента времени: или за 6 часов до начала “ночного” времени, т. е. в 16 часов, или за 6 часов до начала “дневного” времени, т. е. в 1 час ночи.

Теперь рассмотрим моменты “пятилетия” наших зверьков. Для второго зверька “пятилетие” наступает через $5\cdot4=20$ часов независимо от времени включения.

Найдем момент “пятилетия” для первого зверька в случае, если он был включен в 16 часов. За 6 “дневных” часов от 16 до 22 он повзрослеет на $6/3=2$ года. За 9 “ночных” часов от 22 до 7 он повзрослеет еще на $9/6=1{,}5$ года. Итого на 3,5 года. Осталось ему повзрослеть в “дневные” часы на 1,5 года, на что ему понадобится $1{,}5\cdot3=4{,}5$ часа. Суммарное время равно $6+9+4{,}5=19{,}5$ часов, что меньше 20 часов для второго зверька.

Если же зверьки были включены в 1 час ночи, то первый зверек за 6 “ночных” часов повзрослеет на 1 год. А для повзросления на 4 года в дневные часы ему понадобится $4\cdot3=12$ часов. Общее время равно $6+12=18$ часов, что тоже меньше 20 часов у второго зверька.

Итак, первый зверек достигнет пятилетия раньше, чем второй, в обоих случаях. ►

Домашнее задание

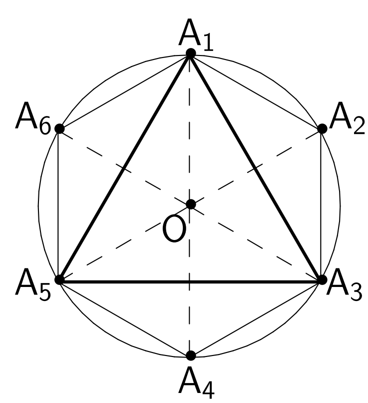
Задача 1. Какое одно и то же число нужно прибавить к числам 100 и 164, чтобы оба результата были квадратами целых чисел?

◄ *Ответ.* $100 + 125 = 15^2$, $164 + 125 = 17^2$. Пусть мы прибавляем натуральное число x и получаем квадраты натуральных чисел m и n, т. е. $100 + x = m^2$, $164 + x = n^2$. Вычитая из второго уравнения первое, получаем $64 = n^2 - m^2 = (n - m)(n + m)$.

Итак, число 64 разлагается в произведение двух натуральных чисел $n - m$ и $n + m$. Всего существует четыре варианта разложения: $1 \cdot 64$, $2 \cdot 32$, $4 \cdot 16$ и $8 \cdot 8$. Первый вариант не подходит, так как числа $n - m$ и $n + m = (n - m) + 2m$ имеют одинаковую четность, а числа 1 и 64 — разную. Четвертый вариант также невозможен, так как числа не равные: $n - m < n + m$. Так что либо $n - m = 2$, $n + m = 32$, либо $n - m = 4$, $n + m = 16$. Складывая уравнения, найдем значение n, а потом и m. Имеем $n = 17$, $m = 15$ или $n = 10$, $m = 6$. В первом случае $x = 125$, а в последнем $x = -64$, что является посторонним решением, так как прибавляется положительное число x. ►

Задача 2. Постройте равносторонний треугольник по двум точкам, одна из которых вершина, а другая — центр.

◄ Задача имеет много разных решений, мы приведем одно из них. Пусть даны точка O — центр треугольника и точка A_1 — его вершина. Проведем окружность с центром O и радиусом $r = OA_1$, она будет описанной около искомого треугольника. С помощью циркуля с раствором r отмечаем на окружности точку A_2 (см. рис.). Треугольник OA_1A_2 — правильный, так как в нем $OA_1 = OA_2 = A_1A_2 = r$, поэтому $\angle A_1OA_2 = 60°$. Аналогично, построим точки A_3, A_4, A_5 и A_6. Каждый из углов $\angle A_1OA_2$, $\angle A_2OA_3$, $\angle A_3OA_4$, $\angle A_4OA_5$, $\angle A_5OA_6$ равен $60°$, поэтому $\angle A_6OA_1$ тоже равен $60°$, ведь все 6 углов в сумме дают полный угол в $360°$. Так что последний треугольник A_6OA_1 также правильный. Таким образом, полученный 6-угольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ является правильным (у него все стороны равны r и он вписанный). Тогда $\triangle A_1A_3A_5$ — равносторонний и, значит, искомый. ►



Задача 3. Докажите, что $2n + 1$ и $3n + 1$ взаимно простые при любом n.

◄ Предположим противное: числа $2n + 1$ и $3n + 1$ имеют общий делитель d, больший 1, т. е. $2n+1 = ad$, $3n+1 = bd$ (a, b — некоторые целые числа). Умножим первое неравенство на 3, второе — на 2 и вычтем из первого второе, тогда получим

$$3 \cdot (2n+1) - 2 \cdot (3n+1) = 3ad - 2bd,$$
$$1 = d(3a - 2b).$$

Итак, выходит, что единица разлагается в произведение двух целых сомножителей d и $3a - 2b$, один из которых (именно d) больше 1. Это и дает противоречие. ►

Задача 4. Квадрат размером 13×13 заполнен числами так, что произведение чисел, стоящих в каждой строке, отрицательно. Докажите, что в некотором столбце произведение также отрицательно.

◄ Пусть произведения чисел в строках равны $a_1, a_2, \ldots, a_{13}$, а в столбцах $b_1, b_2, \ldots, b_{13}$. По условию каждое из чисел a_k отрицательно, требуется доказать, что по крайней мере одно из чисел b_k тоже отрицательно. Допустим это не так, и $b_k \geqslant 0$ для всех k. Найдем произведение всех чисел в таблице двумя способами. С одной стороны, это произведение, очевидно, равно произведению чисел во всех строках $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{13}$, т. е. отрицательно как произведение 13 отрицательных чисел. Это же произведение можно получить, перемножив числа во всех столбцах $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_{13} \geqslant 0$ как произведение неотрицательных чисел. Получаем противоречие: в первом случае произведение всех чисел в таблице меньше 0, а во втором — больше или равно 0. ►

Задача 5. Каждая грань кубика разделена на 4 квадрата. В каждый из этих квадратов вписано число. При этом число, вписанное в любой из 24 квадратов, в сумме с числами, вписанными в четыре соседних с ним квадрата, всегда дает 13. Могут ли все 24 числа быть целыми?

◄ Найдем сумму всех чисел, написанных на кубике. На шести гранях кубика расположено 24 квадрата. Сложим числа, записанные в каждом квадрате, вместе с соседними четырьмя числами. Получим 24 суммы по 13, т. е. $24 \cdot 13 = 312$. При этом каждое число учитывалось 5 раз: первый раз как стоящее в каком-то квадрате и еще 4 раза как "сосед" для четырех других квадратов. Поэтому сумма всех чисел на кубике равна $312/5 = 62{,}4$. Отсюда следует, что все числа не могут быть целыми. ►

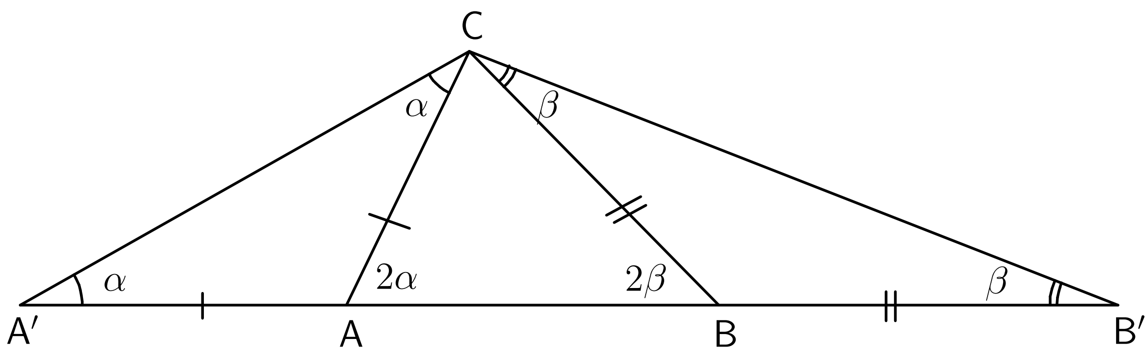
Занятие 3

"Предмет математики столь серьезен, что не следует упускать ни одной возможности сделать его более занимательным". *Б. Паскаль*

Задача 1. Постройте треугольник по периметру и двум углам.

◀ Пусть в треугольнике ABC даны углы $\angle A = 2\alpha$ и $\angle B = 2\beta$ и периметр $p = AB + BC + AC$.

Анализ. Продлим сторону AB в обе стороны и отложим отрезок $AA' = AC$ за точку A и отрезок $BB' = BC$ за точку B. В равнобедренном $\triangle A'CA$ сумма углов при основании $\angle A' + \angle ACA'$ равна внешнему $\angle CAB = 2\alpha$, поэтому каждый из этих уголков равен α. Аналогично, из $\triangle B'CB$ находим $\angle B' = \angle BCB' = \beta$.



Построение. Строим треугольник $A'B'C$ со стороной $A'B' = p$ и углами $\angle A' = \alpha$ и $\angle B' = \beta$. Для нахождения точек A и B откладываем соответственно от сторон CA' и CB' углы $\angle A'CA = \alpha$ и $\angle B'CB = \beta$ внутрь $\triangle A'B'C$. ▶

Задача 2. Докажите, что $\dfrac{171717}{252525} = \dfrac{17}{25}$.

◀ $\dfrac{171717}{252525} = \dfrac{17 \cdot 10^4 + 17 \cdot 10^2 + 17}{25 \cdot 10^4 + 25 \cdot 10^2 + 25} = \dfrac{17 \cdot (10^4 + 10^2 + 1)}{25 \cdot (10^4 + 10^2 + 1)} = \dfrac{17}{25}$. ▶

Задача 3. Докажите, что $333^{555} + 555^{333} \vdots 37$.

◀ Достаточно заметить, что каждое из чисел 333^{555} и 555^{333} делится на $111 = 3 \cdot 37$. ▶

Задача 4. Докажите, что $1994^2 + 1994^2 \cdot 1995^2 + 1995^2$ является квадратом целого числа.

◀ Обозначим $n = 1994$ и перепишем исходное число в виде $n^2 + n^2(n+1)^2 + (n+1)^2$. Покажем, что это выражение является полным квадратом. Действительно,

$$\begin{aligned}n^2+n^2(n+1)^2+(n+1)^2&=n^2+(n+1)^2(n^2+1)=\\=n^2+(n^2+2n+1)(n^2+1)&=n^2+2n(n^2+1)+\big(n^2+1\big)^2=\\&=\big(n^2+n+1\big)^2.\end{aligned}$$

Таким образом, наше число равно $\big(1994^2+1995\big)^2$. ►

Задача 5. Что больше: $\dfrac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$ или $\dfrac{10^{11}+1}{10^{12}+1}$?

◄ *Первое решение.* Для облегчения вычислений сделаем замену $10^{10}=a$. Тогда получим:

$$\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}=\frac{a+1}{10a+1};\quad \frac{10^{11}+1}{10^{12}+1}=\frac{10a+1}{100a+1}.$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{a+1}{10a+1}=\frac{(a+1)(100a+1)}{(10a+1)(100a+1)},$$
$$\frac{10a+1}{100a+1}=\frac{(10a+1)^2}{(10a+1)(100a+1)}.$$

Сравним числители дробей. Имеем:

$$(a+1)(100a+1)=100a^2+101a+1,$$
$$(10a+1)^2=100a^2+20a+1.$$

Так как $101a>20a$ $(a=10^{10})$, числитель первой дроби больше числителя второй дроби, а поскольку знаменатели у них равны, то

$$\frac{a+1}{10a+1}>\frac{10a+1}{100a+1},\ \text{т. е.}\ \frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}>\frac{10^{11}+1}{10^{12}+1}.$$

Второе решение. Вычтя из обеих дробей по 0,1, мы получим дроби с одинаковыми числителями, которые сравним устно:

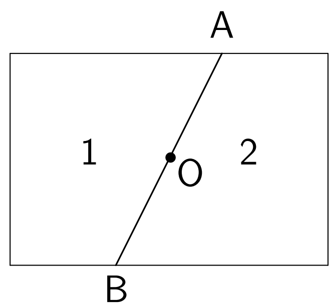
$$\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}-\frac{1}{10}=\frac{9}{10^{12}+10},$$
$$\frac{10^{11}+1}{10^{12}+1}-\frac{1}{10}=\frac{9}{10^{13}+10}.$$

Так как $\dfrac{9}{10^{12}+10}>\dfrac{9}{10^{13}+10}$, то $\dfrac{10^{10}+1}{10^{11}+1}>\dfrac{10^{11}+1}{10^{12}+1}$. ►

Задача 6. На стол положили несколько одинаковых листов бумаги прямоугольной формы. Оказалось, что верхний лист покрывает больше половины площади каждого из остальных листов. Можно ли воткнуть булавку так, чтобы она проколола все листы?

◀ Пусть площадь каждого прямоугольного листа равна S. Рассмотрим верхний лист. Обозначим его центр буквой O и покажем, что точка O попадет внутрь каждого нижнего прямоугольного листа. Тогда в точку O можно будет воткнуть булавку, и она проколет все листы. Предварительно докажем два утверждения.

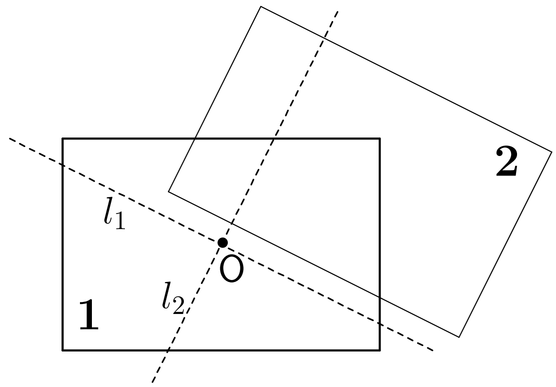
Утверждение первое. Прямая, проходящая через центр прямоугольника, делит его на две части равной площади.



Доказательство. Обозначим центр прямоугольника буквой O, а точки пересечения прямой с его контуром буквами A и B. Выполним поворот плоскости на 180°. Тогда прямая AB перейдет сама в себя, и прямоугольник тоже совместится сам с собой. Таким образом, "картинка" будет той же самой: прямая по-прежнему будет пересекать прямоугольник по отрезку AB, но при этом 1-ая часть прямоугольника совмещается со 2-ой, а 2-ая совмещается с 1-ой (см. рис.). Значит, 1-ая и 2-ая части равны между собой, следовательно, их площади тоже равны.

Утверждение второе. Пусть 1-ый прямоугольник площади S накрывает 2-ой прямоугольник, и площадь перекрытия больше $S/2$. Тогда центр 1-го прямоугольника лежит внутри 2-го.

Доказательство. Допустим, что точка O — центр 1-го прямоугольника — не лежит внутри 2-го прямоугольника. Проведем через точку O прямые l_1 и l_2, параллельные сторонам 2-го прямоугольника. Покажем, что 2-ой прямоугольник расположен либо по одну сторону от прямой l_1, либо по одну сторону от прямой l_2. Действительно, если обе прямые l_1 и l_2 пересекают 2-ой прямоугольник, то прямая l_1 расположена между параллельными ей сторонами 2-го прямоугольника, и прямая l_2 находится между параллельными ей сторонами 2-го прямоугольника. Это означает, что точка пересечения прямых l_1 и l_2 — именно точка O — лежит внутри 2-го прямоугольника, а мы предполагали обратное.



Итак, 2-ой прямоугольник лежит по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через центр O 1-го прямоугольника, следовательно, согласно первому утверждению он перекрывает площадь 1-го прямоугольника, не большую $S/2$. Полученное противоречие завершает доказательство второго утверждения.

По условию все листы одинаковы, и верхний лист накрывает более половины площади каждого, т. е. $> S/2$. Ввиду второго утверждения, заключаем, что точка O расположена внутри каждого нижнего прямоугольного листа. Значит все листы имеют общую точку O, в которую и нужно воткнуть булавку. ►

Задача 7. На первой встрече делегаций Земли и Марса выяснилось, что ноги у марсиан такие же, как у землян, а вот количество рук и пальцев на руках другие. Хотя марсиан было на 6 больше, чем землян, общее число пальцев на руках и ногах у марсиан оказалось на один меньше. Сколько всего участников было на встрече?

◄ *Ответ.* 236. Обозначим через n общее количество пальцев на руках у одного марсианина, а через k — количество людей, участвующих во встрече (n и k — целые неотрицательные числа). Тогда во встрече участвовало $k + 6$ марсиан, у каждого из которых по десять пальцев на ногах и по n пальцев на руках, и k людей, у каждого из которых по 20 пальцев (по 10 на ногах и по 10 на руках). Условие задачи можно теперь записать в виде уравнения $(k+6)(10+n)+1 = 20k$ относительно целых неотрицательных чисел n и k . Преобразуем это уравнение к виду $(k + 6)(10 + n) + 1 + 120 = 20k + 120$, или $121 = (k + 6)(10 - n)$. Учитывая, что числа n и k — целые неотрицательные, получаем, что число $10 - n$ должно равняться некоторому положительному делителю числа 121, не большему 10. Но такой делитель только один — это единица (так как $121 = 11^2$, а 11 — простое число). Следовательно, $n = 9$, $k = 115$, $k + 6 = 121$, а общее количество участников встречи — $115 + 121 = 236$. ►

Задача 8. В кошельке 50 монет на сумму 98 копеек. Можно ли утверждать, что деньги в кошельке можно разделить на две равные части?

◀ Нарисуем окружность и разделим ее на 98 равных частей. Затем 50 из 98 точек деления отметим красным цветом так, чтобы 50 дуг с красными концами соответствовали по длине достоинствам 50 монет из кошелька. Тогда мы увидим, что найдутся две диаметрально противоположные красные точки. В самом деле, разобьем 98 точек деления на 49 пар диаметрально противоположных. Если бы в каждой такой паре было не более одной красной точки, то во всех парах имелось бы не более 49 красных точек, а на окружности их отмечено 50. Значит, в какой-то паре обе точки — красные. Они и определяют разделение монет на две части равного достоинства. ▶

Задача 9. 101 гирька расположены по окружности. Масса каждой из них выражена натуральным числом, а общая масса всех гирек 300 г. Докажите, что из этого набора можно выбрать одну или несколько гирек, расположенных подряд и имеющих общую массу 200 г.

◀ Отметим на окружности 300 точек, разбивающих ее на 300 равных частей. Каждой гирьке массой m поставим в соответствие дугу, состоящую из m последовательных частей. Концы таких дуг сделаем красными, их будет 101, а остальные $300 - 101 = 199$ точек деления — черными.

Рассмотрим 100 равносторонних треугольников с вершинами в отмеченных точках. Среди них найдется хотя бы один треугольник с двумя красными вершинами (в противном случае, черных вершин было бы $\geqslant 2 \cdot 100 = 200$). Тогда две красные его вершины разобьют окружность на 2 части — большая дуга с гирьками, дающими в сумме 200 г, а меньшая — 100 г. ▶

Домашнее задание

Задача 1. Докажите, что $1980 \cdot 1981 \cdot 1982 \cdot 1983 + 1$ — квадрат некоторого целого числа, и найдите его.

◀ Обозначим $n = 1980$. Тогда исходного число равно
$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1.$$
Представим это выражение в виде полного квадрата:

$$\underline{n}(n+1)(n+2)\underline{(n+3)} = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 = \\ = \left(n^2+3n\right)^2 + 2(n^2+3n)+1 = \left(n^2+3n+1\right)^2.$$

Итак, данное число есть точный квадрат $\left(1980^2+3\cdot 1980+1\right)^2$. ►

Задача 2. Докажите, что $\dfrac{313131}{757575}=\dfrac{31}{75}$.

◄ Задача решается аналогично задаче 2 на стр. 52. ►

Задача 3. Можно ли все натуральные числа от 1 до 9 записать в таблицу 3×3 так, чтобы сумма чисел в любых двух соседних клетках равнялась простому числу?

◄ *Ответ.* Нельзя. Предположим, что все натуральные числа от 1 до 9 можно записать в клетки таблицы 3×3 требуемым образом. Заметим, что в соседних (по вертикали и горизонтали) клетках обязательно должны стоять числа разной четности, так как сумма двух различных натуральных чисел одной четности — четное натуральное число, отличное от двойки, поэтому такая сумма не может являться простым числом. Отсюда вытекает, что четыре числа, стоящие в клетках, соседних с центральной клеткой, одной четности, а пять чисел, стоящие в центральной и в угловых клетках — другой четности. Так как среди натуральных чисел от 1 до 9 четыре четных числа и пять нечетных, то в клетках, соседних с центральной, стоят четные числа (2, 4, 6, 8), но тогда их суммы с числом в центральной клетке — четыре последовательных нечетных простых числа, чего быть не может (из трех последовательных нечетных чисел ровно одно делится на 3, но если одна из этих четырех сумм (наименьшая) будет равна трем, то наибольшая будет равна девяти, т. е. не будет простым числом). Полученное противоречие доказывает, что наше предположение неверно, следовательно, все числа от 1 до 9 нельзя записать в клетки таблицы 3×3 требуемым образом. ►

Задача 4. Набор состоит из гирек с целочисленными массами. Известно, что если из набора убрать любую из гирек, то оставшиеся можно разложить по двум чашкам весов так, что весы будут в равновесии. Докажите, что в наборе нечетное число гирек.

◄ Будем называть гирьку *четной*, если она имеет четную массу, и *нечетной* в противном случае. Заметим, что при удалении любой гирьки сумма масс оставшихся гирек всегда четна $(*)$, иначе их было бы нельзя разбить на две равные кучки. Отсюда вытекает, что гирьки в наборе либо все четные, либо все нечетные. Действительно, если в наборе находятся и четная, и нечетная гирьки, то при удалении первой мы получим, что сумма масс оставшихся гирек имеет одну четность, а при удалении второй — другую четность, а это противоречит вышеуказанному условию $(*)$.

Рассмотрим первый случай, когда все гирьки в наборе имеют нечетную массу. После удалении одной какой-то гирьки не может остаться нечетное число гирек, так как они в сумме давали бы нечетное число грамм. Значит, остается четное число гирек, а в самом наборе количество гирек — нечетное.

В случае, когда все гирьки четные, мы можем поделить их массы на 2, от этого условие задачи не нарушится. Если полученные массы опять все четны, снова делим их на 2 и так до тех пор, пока одна из гирек не станет нечетной. В то же время, если одна гирька стала нечетной, то и все остальные — тоже нечетные, поскольку в наборе не может существовать двух гирек разной четности. Таким образом, мы получаем первый случай. ►

Занятие 4

<u>Часть I.</u> Разминка.

Задача 1. В записи некоторого числа 30 единиц, все остальные цифры — нули. Может ли оно быть точным квадратом?

◄ Сумма цифр этого числа равна 30, значит, оно делится на 3, но не делится на 9. Если $m^2 \vdots 3$, то $m \vdots 3 \Rightarrow m^2 \vdots 9$. Следовательно, данное число не может быть точным квадратом. ►

Задача 2. Решите уравнение $4x^2+9y^2+16z^2-4x-6y-8z+3=0$.

◄ Выделим полные квадраты в левой части уравнения:

$$(4x^2-4x+1)+(9y^2-6y+1)+(16z^2-8z+1)=0,$$
$$(2x-1)^2+(3y-1)^2+(4z-1)^2=0.$$

Поскольку в левой части стоит сумма трех квадратов, то каждый из них должен равняться нулю, отсюда находим $x=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{1}{3}$, $z=\dfrac{1}{4}$. ►

Задача 3. Когда Гулливер попал в Лилипутию, то обнаружил, что все вещи в 12 раз короче, чем на Родине. Сколько лилипутских спичечных коробков поместится в спичечном коробке Гулливера?

◄ *Ответ.* 12^3 коробков, поскольку в длину, ширину и высоту теперь умещается 12 коробков. ►

Задача 4. Если на круговом маршруте работают два автобуса, то интервал движения 21 мин. Каков интервал движения, если на маршруте 3 автобуса?

◀ *Ответ.* 14 мин. Полкруга автобус проходит за 21 мин, значит, весь круг за 42 мин. Интервал движения для трех автобусов составляет треть круга, т. е. $42/3 = 14$ мин. ▶

Задача 5. Число $a^2 + 9ab + b^2 \vdots 11$. Докажите, что $a^2 - b^2 \vdots 11$.

◀ Имеем $a^2 + 9ab + b^2 = (a^2 - 2ab + b^2) + 11ab = (a - b)^2 + 11ab \vdots 11$, но поскольку $11ab$ кратно 11, то $(a - b)^2 \vdots 11 \Rightarrow a - b \vdots 11$ (ведь 11 — простое число). Таким образом, $a^2 - b^2 = \underbrace{(a - b)}_{\text{кратно } 11}(a + b) \vdots 11$. ▶

Задача 6. В стране 20 городов; каждые два из них соединены авиалинией. Сколько авиалиний в стране?

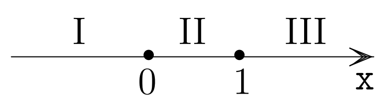
◀ *Ответ.* 190 авиалиний. Из каждого города выходит 19 авиалиний в другие города, поэтому для всех 20 городов получаем $20 \cdot 19$ авиалиний. Но в этом произведении каждая авиалиния учтена дважды (первый раз для одного конца, второй раз — для другого), так что в стране действуют $20 \cdot 19/2 = 190$ различных авиалиний. ▶

Часть II.

Задача 1. Постройте графики:

а) $y = |x| + |x - 1|$; б) $y = |x + 1| + |x - 2|$.

◀ а) Нули модулей разбивают числовую ось на три промежутка:



I $\begin{cases} x < 0, \\ y = -x + (-x + 1). \end{cases}$ **II** $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ y = x + (-x + 1). \end{cases}$ **III** $\begin{cases} x > 1, \\ y = x + (x - 1). \end{cases}$

$\begin{cases} x < 0, \\ y = -2x + 1. \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ y = 1. \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1, \\ y = 2x - 1. \end{cases}$

График функции изображен на рис. 1.

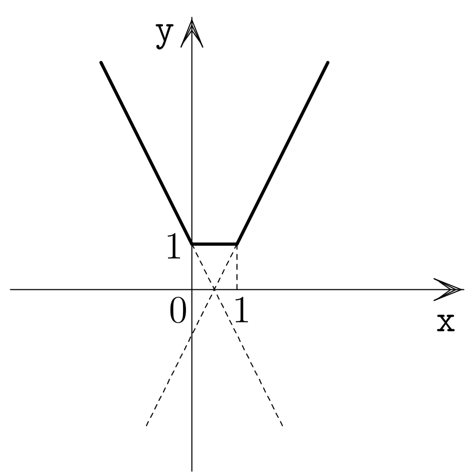


Рис. 1

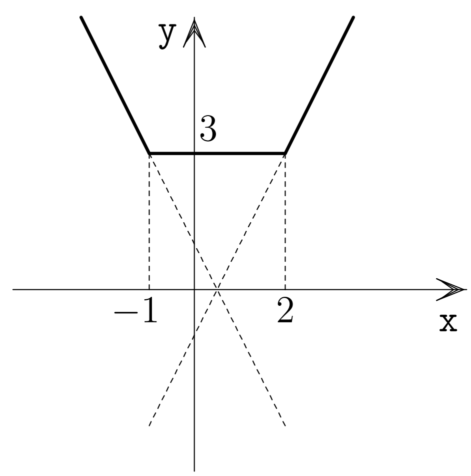


Рис. 2

б) График строится аналогично пункту (а). Нули модулей (точки $x = -1$ и $x = 2$) разбивают числовую ось на три промежутка, поэтому рассматриваются три случая. График изображен на рис. 2. ►

Задача 2. Постройте множество точек $|x - 1| + |y| = 2$.

◄ Для снятие знаков модуля в левой части уравнения рассмотрим всевозможные четыре случая:

$$\mathbf{I}\begin{cases} x \geqslant 1, \\ y \geqslant 0, \\ (x-1)+y=2. \end{cases} \qquad \mathbf{II}\begin{cases} x \geqslant 1, \\ y < 0, \\ (x-1)-y=2. \end{cases}$$

$$\mathbf{III}\begin{cases} x < 1, \\ y \geqslant 0, \\ (-x+1)+y=2. \end{cases} \qquad \mathbf{IV}\begin{cases} x < 1, \\ y < 0, \\ (-x+1)-y=2. \end{cases}$$

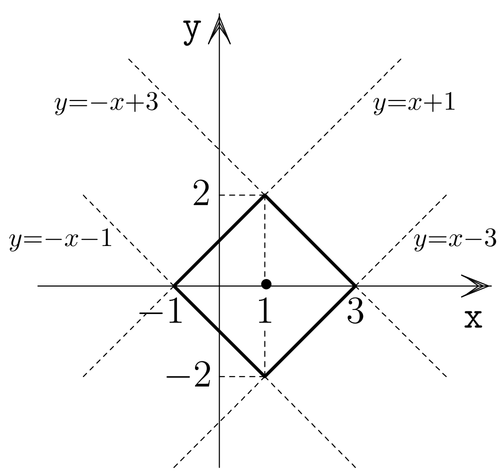


График уравнения состоит из отрезков четырех прямых, образующих квадрат (см. рисунок).

В общем случае, график уравнения $|x-a|+|y-b| = d$ представляет собой квадрат с центром в точке (a, b) и диагоналями, параллельными осям координат, у которого половина диагонали равна d. ►

Задача 3. Докажите неравенства:

а) $\dfrac{5}{4}a^2 + 3ab + 2b^2 \geqslant 0$, б) $a^2 + b^2 + 1 \geqslant ab + a + b$.

◄ а) Сгруппируем слагаемые в левой части следующим образом:

$$(a^2 + 2ab + b^2) + \left(\frac{1}{4}a^2 + ab + b^2\right) \geqslant 0,$$

$$(a+b)^2 + \left(\frac{a}{2} + b\right)^2 \geqslant 0.$$

Последнее неравенство верно, так как сумма двух квадратов всегда неотрицательна.

б) Умножим обе части неравенства на 2 и перенесем все члены в левую часть.

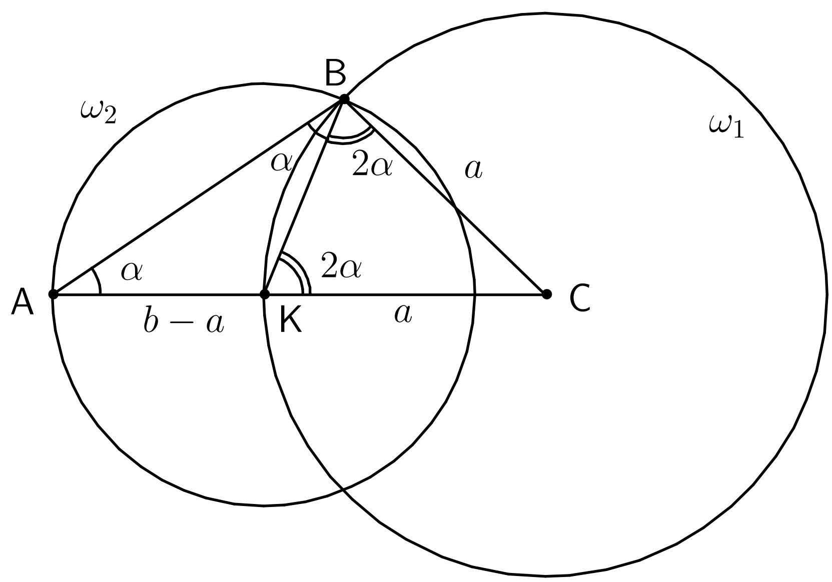
$$2a^2 + 2b^2 + 2 - 2ab - 2a - 2b \geqslant 0,$$
$$\left(a^2 - 2ab + b^2\right) + \left(a^2 - 2a + 1\right) + \left(b^2 - 2b + 1\right) \geqslant 0,$$
$$(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \geqslant 0.$$

В левой части стоит число неотрицательное, значит, неравенство выполнено. ►

Задача 4. Постройте циркулем и линейкой треугольник по двум данным сторонам, если известно, что величина угла против одной из них в 3 раза больше величины угла против другой.

◄ Пусть в треугольнике ABC даны стороны $BC = a$ и $AC = b$, и известно, что $\angle A = \alpha$, $\angle B = 3\alpha$ (α — не известно). Поскольку против бóльшего угла лежит бóльший угол, то $b > a$.

Анализ. Отметим на стороне AC точку K такую, что $\angle ABK = \alpha$. Тогда $\angle BKC = \angle A + \angle ABK = 2\alpha$ (как внешний в $\triangle ABK$). Таким образом, получаем, что треугольники ABK и CBK — равнобедренные ($\angle A = \angle ABK = \alpha$ и $\angle BKA = \angle KBC = 2\alpha$). Значит, $KC = BC = a$ и $BK = AK = AC - KC = b - a$.



План построения. Строим отрезок $AC = b$. Из точки C как из центра проводим окружность ω_1 радиуса a; пусть она пересечет отрезок AC в точке K. Из точки K как из центра проводим вторую окружность ω_2 радиуса $KA = b - a$. Она пересечет окружность ω_1 в двух точках; обозначим одну из них буквой B. Треугольник ABC — искомый.

Построение невозможно выполнить, если окружности ω_1 и ω_2 вовсе не пересекаются (т. е. когда окружность ω_2 настолько велика, что ω_1 оказывается внутри нее). Поэтому нужно потребовать выполнения условия: $b - a < 2a$ (радиус ω_2 меньше диаметра ω_1), или $b < 3a$. ▶

Задача 5. Дана линейка с делением через 1 см. Постройте только с помощью этой линейки какую-нибудь прямую, перпендикулярную данной прямой.

◀ Докажем предварительно теорему: если медиана в треугольнике равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC медиана $CM = \frac{1}{2}AB = AM = MB$. Тогда треугольники AMB и CMB равнобедренные, значит, у них углы при основании равны. Обозначим $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, тогда $\angle C = \alpha + \beta$ (см. рис. 1). Сумма углов треугольника ABC равна 180°, отсюда соотношение $\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$. Итак, $\angle C = \alpha + \beta = 90^\circ$, т. е. треугольник ABC равнобедренный. Теорема доказана.

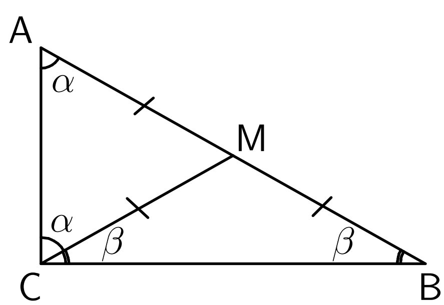


Рис. 1

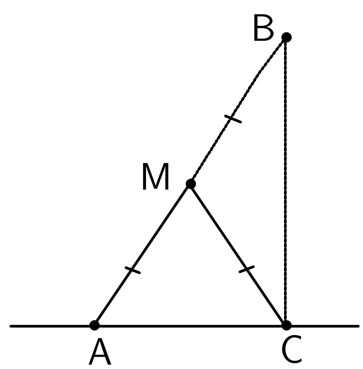
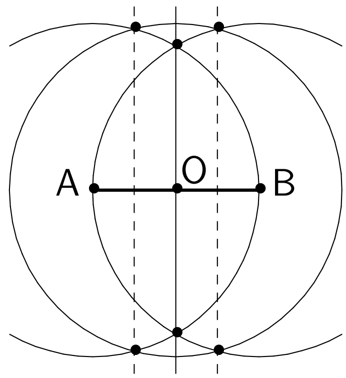


Рис. 2

План построения. Отметим на данной прямой какую-нибудь точку A и при помощи линейки отложим отрезок $AM = 1$ см вне прямой (см. рис. 2). Затем приведем линейку в такое положение, чтобы одно ее деление совместилось с точкой M, а другое (соседнее) деление попало на данную прямую. Так мы построим отрезок $MC = 1$ см. Наконец, на продолжении отрезка AM за точку M отложим отрезок $MB = 1$ см. Согласно теореме $BC \perp AC$. ▶

Задача 6. Разделите отрезок AB на четыре равные части с помощью циркуля и линейки, проведя всего 6 линий.

◀ Построим две окружности с центрами A и B с одинаковым радиусом, равным длине отрезка AB. Они пересекутся в двух точках, через которые мы проведем прямую. Эта прямая (на рисунке она обозначена сплошной линией) разделит отрезок AB пополам. Так определяется точка O — середина AB.



Построим третью окружность с центром O и тем же радиусом AB. Через точки ее пересечения с первыми двумя окружностями проведем еще две прямые (на рисунке они обозначены пунктирными линиями), которые разделят половинки AO и OB тоже пополам. Таким образом, отрезок AB разделится на 4 равные части, а построено будет три окружности и три прямые, т. е. всего шесть линий. ▶

Задача 7*. Решите систему

$$\begin{cases} x - \dfrac{2x+y}{x^2-y^2} = 1, \\ y + \dfrac{x+2y}{x^2-y^2} = 1. \end{cases}$$

◀ Вычтем из первого уравнения системы второе:

$$x - y - \frac{(2x+y)+(x+2y)}{x^2-y^2} = 0,$$

$$x - y - \frac{3(x+y)}{(x-y)(x+y)} = 0,$$

$$x - y - \frac{3}{x-y} = 0, \quad (x-y)^2 = 3,$$

$$x - y = \pm\sqrt{3}. \tag{1}$$

Теперь сложим первое и второе уравнения системы:

$$x + y - \frac{(2x+y)-(x+2y)}{x^2-y^2} = 2,$$

$$x + y - \frac{x-y}{(x-y)(x+y)} = 2,$$

$$x + y - \frac{1}{x+y} = 2, \quad (x+y)^2 - 2(x+y) - 1 = 0.$$

Получается квадратное уравнение относительно $x + y$. Находим его корни
$$x + y = 1 \pm \sqrt{2}. \tag{2}$$
Из уравнений (1) и (2) легко находятся значения x и y. При этом надо рассмотреть четыре различные комбинации плюсов и минусов, поэтому получается четыре решения:
$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}), \quad y = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3});\\
x &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}), \quad y = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3});\\
x &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}), \quad y = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2} - \sqrt{3});\\
x &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}), \quad y = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}). \blacktriangleright
\end{aligned}$$

Домашнее задание

Задача 1. Решите уравнение $x^2 + 5y^2 + 4xy + 2y + 1 = 0$.

◀ Выделим полные квадраты в левой части, сгруппировав слагаемые так:
$$\big(x^2 + 4xy + 4y^2\big) + \big(y^2 + 2y + 1\big) = 0,$$
$$(x + 2y)^2 + (y + 1)^2 = 0,$$
отсюда
$$x + 2y = 0 \ \text{ и } \ y + 1 = 0.$$
Решая эту систему, находим: $x = -2$, $y = -1$. ▶

Задача 2. Постройте график $y = |2 - x| + |x - 3|$.

Задача 3. При каких значениях a и b многочлен $x^3 + ax^2 + 2x + b$ делится на $x^2 + x + 1$?

◀ Поделим первый многочлен на второй “под углом”:
$$\begin{array}{l|l}
x^3 + ax^2 + 2x + b & x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 + x^2 + x} & x + (a-1) \\
\quad (a-1)x^2 + x + b & \\
\quad \underline{(a-1)x^2 + (a-1)x + (a-1)} & \\
\qquad\qquad (2-a)x + (b-a+1) &
\end{array}$$
Если первый многочлен делится на второй, то в остатке должен получиться 0. Это возможно, когда $2 - a = 0$ и $b - a + 1 = 0$, т. е. при $a = 2$, $b = 1$. ▶

Задача 4. На дне озера бьют ключи. Стадо из 183 слонов может его выпить за 1 день, а стадо из 37 слонов — за 5 дней. За сколько дней выпьет озеро один слон?

◀ Пусть один слон выпивает x л воды за день, а ключи добавляют y л воды в день. 183 слона выпьют $183x$ л воды за один день, из них y л — ключевая вода. Значит, объем воды в озере составляет $183x-y$ л. С другой стороны, 37 слонов выпьют $37x - y$ л чисто озерной воды за день, и поскольку за пять дней они опустошат все озеро, то его объем равен $5 \cdot (37x - y)$. Итак, $183x - y = 5 \cdot (37x - y)$, откуда находим, что

$$x = 2y. \tag{$*$}$$

Это означает, что один слон выпивает в два раза больше воды, чем добавляют ключевые источники, т. е. один слон действительно может выпить все озеро. Пусть ему на это потребуется k дней. В день воды в озере убавляется на $x - y$ л, следовательно, объем озера $k(x - y)$ л. Получается уравнение

$$k(x - y) = 183x - y.$$

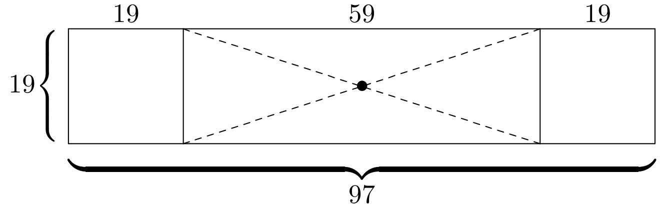
Подставляя сюда вместо x выражение $2y$ из $(*)$, вычисляем k:

$$\begin{aligned} ky &= 183 \cdot 2y - y, \quad \text{(сокращаем на } y\text{)} \\ k &= 183 \cdot 2 - 1 = 365. \end{aligned}$$

Итог: насыщение одного слона длится 365 дней = 1 год. ▶

Задача 5. Стальную плитку размером 19×97 обвели карандашом. Найдите центр полученного прямоугольника, используя ту же самую плитку.

◀ Центром прямоугольника является точка пересечения его диагоналей. Но длины диагоналей слишком велики — они больше сторон прямоугольника, так что их нельзя провести при помощи данной плитки. Поэтому применим такую хитрость. Используя плитку, отложим от двух меньших противоположных сторон прямоугольника 19×97 полосы шириной 19, как показано на рисунке.

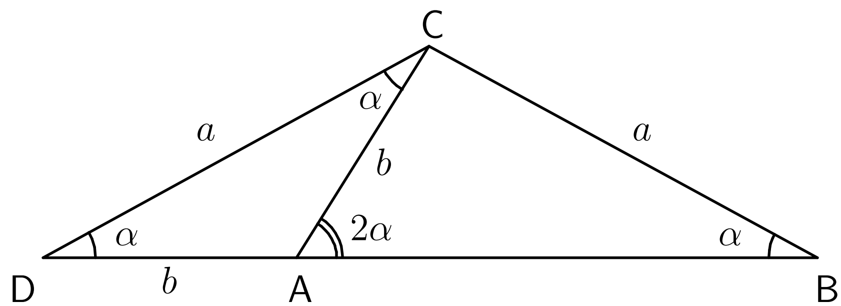


Внутри образуется прямоугольник 19×59. Длины его диагоналей (по неравенству треугольника) меньше $19+59 = 78$, следовательно, обе диагонали можно провести при помощи края плитки длиной 97. Эти диагонали как раз пересекутся в центре исходного прямоугольника. ▶

Задача 6. Постройте треугольник по двум сторонам, если известно, что величина угла против одной из них в 2 раза больше величины угла против другой.

◀ Анализ. Пусть нам даны стороны $BC = a$ и $AC = b$ треугольника ABC и $a > b$. Против угла A лежит бóльшая сторона, нежели против угла B, поэтому $\angle A > \angle B$. По условию один из этих углов в два раза больше другого. Обозначим $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = \alpha$, где α — какой-то неизвестный угол.

Продолжим отрезок AB за точку A и отложим на продолжении отрезок AD, равный b (см. рисунок). Треугольник CAD равнобедренный, поэтому $\angle ADC = \angle ACD$. Кроме того, сумма $\angle ADC + \angle ACD$ равна внешнему углу CAB треугольника ACD, т. е. 2α. Следовательно, $\angle ADC = \angle ACD = \alpha$. Выходит, что в треугольнике DCB $\angle D = \angle B = \alpha$, значит, он равнобедренный и $DC = BC = a$.



Построение. Строим треугольник CAD по трем сторонам $CD = a$, $AC = AD = b$. Для определения положения точки B проводим окружность с центром C и радиусом a. Она пересечет прямую DA (помимо точки D) в точке B. Треугольник ABC — искомый.

Построение возможно, если существует $\triangle CAD$ со сторонами a, b, b, т. е. когда $2b > a$. Таким образом, должны выполняться условия $b < a < 2b$. ▶

Занятие 5

<u>Часть I.</u> Разминка.

Задача 1. Мяч обернут веревочной сеткой, в которой из каждого узла выходят ровно 3 веревочки. Может ли сетка содержать 2001 узелок?

◀ Допустим сетка содержит 2001 узелок. Подсчитаем сколько всего использовано веревочек для связки. Из каждого из 2001 узелка выходят по 3 веревочки, т. е. в итоге получается $2001 \cdot 3$ веревочки. Но каждую веревочку мы подсчитываем дважды, поскольку она соединяет два узелка, — первый раз для одного узелка, другой раз — для второго узелка на концах. Поэтому данное произведение нужно разделить на 2, получается $2001 \cdot 3/2 = 3001\frac{1}{2}$ — число нецелое. Следовательно, количество узелков не равно 2001. Из решения следует, что количество узелков обязательно должно быть четным; см. также решение задачи 5 на стр. 28. ▶

Задача 2. Может ли число $k^2 + k + 1$ быть точным квадратом при натуральном k?

◀ Из неравенств

$$k^2 < k^2 + k + 1 < k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

следует, что число $k^2 + k + 1$ “зажато” между двумя точными квадратами последовательных натуральных чисел, значит, само точным квадратом быть не может. ▶

Задача 3. Двое играющих поочередно вынимают из двух ящиков шары. В свой ход каждый может брать из любого (только одного) ящика произвольное число шаров. Выигрывает тот, кто берет последний шар. Кто выигрывает при правильной игре, и как следует играть, чтобы выиграть?

◀ Если первоначально в ящиках лежит одинаковое число шаров, то выиграет второй игрок. Его стратегия такова: в ответ на ход первого игрока он каждый раз делает симметричный ему ход, т. е. если первый игрок взял несколько шаров из какого-то ящика, то второй берет такое же количество шаров, но из другого ящика. Таким образом, после хода второго игрока в ящиках всегда остается одинаковое число шаров, и последний шар возьмет именно он.

В случае, когда начальное число шаров в ящиках не одинаково, выиграет первый игрок. Первым своим ходом он уравнивает число шаров в ящиках, т. е. берет из бо́льшего ящика столько шаров, чтобы в нем осталось количество шаров такое же, как и в другом. А дальше первый игрок применяет стратегию, которая описана в первом случае. ▶

Часть II.

Задача 1. Постройте графики:

$$\text{а) } |x-1| + |y| = 2; \quad \text{б) } \frac{x + 2(y-3)}{2x+y} = 2.$$

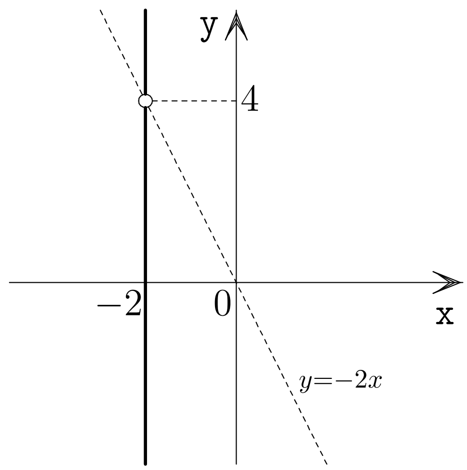
◀ а) См. решение задачи 2 на стр. 60.

б) Перенесем всё в левую часть и приведем слагаемые к общему знаменателю:

$$\frac{x+2(y-3)-2(2x+y)}{2x+y}=0, \qquad \frac{-3(x+2)}{2x+y}=0,$$

$$\begin{cases} x+2=0, \\ 2x+y\neq 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-2, \\ y\neq -2x. \end{cases}$$

График уравнения представляет собой прямую $x=-2$, параллельную оси ординат, с одной исключенной точкой $(-2,4)$ (см. рисунок). ►



Задача 2. Решите систему

$$\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0, \\ x+y+z=8, \\ xy=-z^2. \end{cases}$$

◄ *Ответ*. Два решения $(8,-8,8)$ и $(-8,8,8)$. Подставляя в первое уравнение вместо $-z^2$ выражение xy из третьего уравнения, получаем

$$x^2+y^2+2xy=0, \quad (x+y)^2=0, \quad x=-y.$$

Используя это во втором и третьем уравнениях, находим $z=8$ и $y^2=$ $=64$, т. е. $y=\pm 8$ и $x=\mp 8$. ►

Задача 3. Докажите, что 545^4+4^{545} — число составное.

◄ Преобразуем числовое выражение

$$545^4+4^{545}=545^4+2^{2\cdot 545}=\left(545^4+2\cdot 545^2\cdot 2^{545}+2^{2\cdot 545}\right)-$$
$$-545^2\cdot 2^{546}=\left(545^2+2^{545}\right)^2-\left(545\cdot 2^{273}\right)^2=$$
$$=\left(545^2+2^{545}-545\cdot 2^{273}\right)\left(545^2+2^{545}+545\cdot 2^{273}\right),$$

где каждый множитель в скобках в последнем произведении больше единицы. ►

Задача 4. Решите уравнение

$$2^{128} - 2^{97} + 2^{33} - 1 = \left(3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257 \cdot (2^{16}+1)\right)^3 \cdot 641x.$$

◄ *Ответ.* $x = (2^{32}+1) : 641$. Если положить $2^{16} = a$, уравнение примет вид $\left(a^2-1\right)^3(a^2+1) = (a-1)^3(a+1)^3 \cdot 641x$. Откуда находим $x = (2^{32}+1) : 641$. Это число целое (см. задачу 3 в дом. задании). ►

Задача 5. Разделите отрезок на 4 равные части шестью линиями.

◄ См. решение задачи 6 на стр. 62. ►

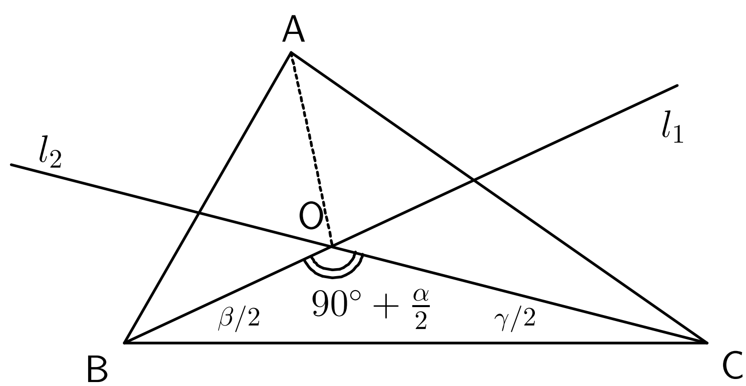
Задача 6. Как построить $\triangle ABC$, если даны точка A и прямые l_1 и l_2, на которых лежат биссектрисы внутренних углов B и C?

◄ *Первое решение.* Анализ. Пусть O — точка пересечения биссектрис в $\triangle ABC$. Обозначим $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$.

Рассмотрим $\triangle BOC$. В нем $\angle OBC = \beta/2$, $\angle OCB = \gamma/2$, поэтому

$$\angle BOC = 180° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 180° - \frac{180° - \alpha}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2}.$$

Поскольку AO — биссектриса, то $\angle BAO = \angle CAO = \alpha/2$.



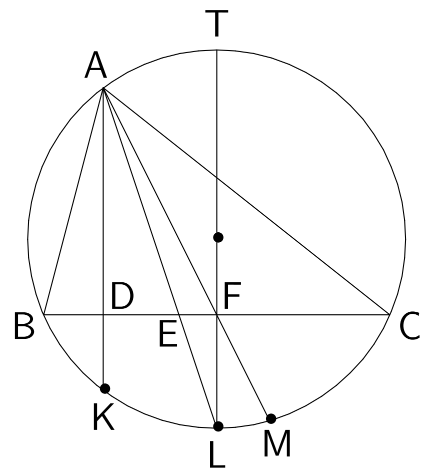
Построение. Обозначим через O точку пересечения прямых l_1 и l_2. Рассмотрим угол $\widehat{l_1Ol_2}$ между этими прямыми — тот из четырех углов, внутри которого лежит точка A. По доказанному он равен $90° + \frac{\alpha}{2}$ (он является вертикальным к углу BOC). "Вычитаем" из этого угла прямой угол (прямой угол строится заранее), получим угол $\alpha/2$. Наконец, откладываем от луча AO в обе стороны углы $\angle OAB$ и $\angle OAC$, равные построенному углу $\alpha/2$. Точки пересечения сторон этих углов с прямыми l_1 и l_2 дадут нам соответственно точки B и C.

Построение возможно, если изначально угол $\widehat{l_1Ol_2}$ тупой ($*$).

Второе решение. По свойству биссектрисы угла точки A_1 и A_2, симметричные точке A относительно l_1 и l_2, лежат на прямой BC. Построив прямую A_1A_2, найдем вершины B и C.

Построение может быть выполнено, если точки A и O не окажутся по разные стороны от прямой A_1A_2. Подумайте самостоятельно, как отсюда получить необходимость выполнения условия $(*)$. ►

Задача 7. AD, AE и AF — высота, биссектриса и медиана $\triangle ABC$; их продолжения пересекают описанную окружность в точках K, L, M. Как по этим точкам построить $\triangle ABC$?



◄ Точки K, L, M полностью определяют окружность и ее центр (ведь окружность является также описанной около $\triangle KLM$; с помощью циркуля и линейки можно построить ее центр — точку пересечения серединных перпендикуляров к сторонам KL и LM, а затем и саму окружность).

Поскольку AE — биссектриса, то вписанные углы $\angle BAL$ и $\angle CAL$ равны между собой, следовательно, равны хорды BL и CL, на которые они опираются. Треугольник BLC равнобедренный, так что в нем медиана LF (напомним, F — середина BC) является также высотой. Итак, диаметр LT перпендикулярен хорде BC и проходит через ее середину — точку F. Также $AK \perp BC$ (ведь AD — высота), поэтому $AK \parallel LT$.

Построение. Строим окружность и диаметр LT. Через точку K проводим прямую, параллельную LT; так находим вершину A. Пересечение прямых AM и LT даст нам точку F. Через точку F проводим прямую, перпендикулярную LT; так определяем вершины B и C. ►

Задача 8. В трех семьях мужья на 3 года старше своих жен. Известно, что Николай на 3 года моложе Надежды; Федору и Марии вместе 56 лет; а Степану и Елене вместе 50 лет. Кто на ком женат?

◀ *Ответ.* Супружеские пары — Николай и Елена, Федор и Надежда, Степан и Мария.

Указание. Поскольку муж на 3 года старше жены, то сумма возрастов мужа и жены — число нечетное. Из условия тогда следует, что Николай — не муж Надежды, Федор — не муж Марии, Степан — не муж Елены. Значит, нужно рассмотреть только два случая. Какие? ▶

Домашнее задание

Задача 1. Постройте графики:

$$\text{а) } |x| - |y| = 4; \quad \text{б) } \frac{2(x-3)-y}{x-2y} = 2.$$

Задача 2. Докажите, что $2^{32}+1$ делится на 641. (Использовать, что $2^4+5^4=641$.)

◀ Имеем

$$\begin{aligned} 2^{32}+1 &= 2^{32} + 2^{28}\cdot 5^4 - 2^{28}\cdot 5^4 + 1 = \\ &= 2^{28}\cdot(2^4+5^4) - (2^{14}\cdot 5^2 - 1)(2^{14}\cdot 5^2+1) = \\ &= 2^{28}\cdot 641 - (2^7\cdot 5+1)\cdot(2^7\cdot 5-1)(2^{14}\cdot 5^2+1) = \\ &= 2^{28}\cdot 641 - 641\cdot 639(2^{14}\cdot 5^2+1) = 641\cdot a, \end{aligned}$$

где a — какое-то целое число. ▶

Задача 3. Как построить треугольник ABC, если даны прямая AB и серединные перпендикуляры сторон AC и BC?

◀ *Указание.* Прямые, симметричные AB относительно серединных перпендикуляров l_1 и l_2, пересекаются в точке C. ▶

Задача 4. Известно, что $x+\dfrac{1}{y} = y+\dfrac{1}{z} = z+\dfrac{1}{x}$. Докажите, что либо $x=y=z$, либо $|xyz|=1$.

◀ Пусть x, y, z — три числа, для которых выполнено каждое из следующих трех равенств:

$$x+\frac{1}{y} = y+\frac{1}{z}, \quad y+\frac{1}{z} = z+\frac{1}{x}, \quad z+\frac{1}{x} = x+\frac{1}{y}.$$

Легко показать, что если два из этой тройки чисел равны, то они все равны друг другу. (Например, если $x=y$, то из первого равенства следует, что $y=z$.) Перепишем данные равенства в виде

$$x-y = \frac{1}{yz}(y-z), \quad y-z = \frac{1}{zx}(z-x), \quad z-x = \frac{1}{xy}(x-y)$$

и перемножим их. Получим равенство

$$(x-y)(y-z)(z-x)=\frac{1}{(xyz)^2}(y-z)(z-x)(x-y),$$

т. е.

$$(x-y)(y-z)(z-x)\cdot\frac{(xyz)^2-1}{(xyz)^2}=0.$$

Отсюда следует, что либо какой-нибудь из сомножителей $x-y$, $y-z$, $z-x$ равен нулю (тогда, как было показано выше, справедливы равенства $x=y=z$), либо $(xyz)^2-1=0$, т. е. $|xyz|=1$. ►

Занятие 6

Часть I. Разминка.

Задача 1. Продолжи ряд 2, 9, 10, 12, 19, 21, ...

Задача 2. Дана последовательность $12+34$, $56+78$, $910+1112$, $1314+1516$, ... Сколько чисел в ней делятся на 4?

◄ Ни одно из указанных чисел не делится на 4, так как в каждой сумме одно из чисел (второе) делится на 4, а предыдущее нет. ►

Часть II. В помощь материалу, изучаемому на уроках.

Задача 1. Дано: $x^2-yz=a$, $y^2-xz=b$, $z^2-xy=c$. Докажите, что $ax+by+cz=(a+b+c)(x+y+z)$.

◄ Левая часть доказываемого равенства равна

$$ax+by+cz=(x^2-yz)x+(y^2-xz)y+(z^2-xy)z=\\=x^3+y^3+z^3-3xyz,$$

а правая часть равна

$$(a+b+c)(x+y+z)=(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)(x+y+z)\overset{(*)}{=}\\=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

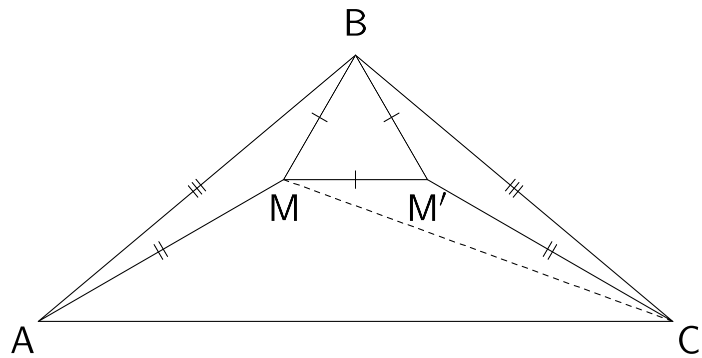
В равенстве $(*)$ легко убедиться непосредственным раскрытием скобок и приведением подобных слагаемых. ►

Задача 2. Делится ли $2^{62}+1$ на $2^{31}+2^{16}+1$?

◄ *Ответ*. Да. Если $2^{15}=x$, то делитель $2x^2+2x+1$, а делимое $4x^4+1=\left(2x^2+1\right)^2-4x^2=(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)$, т. е. деление будет выполняться без остатка. ►

Задача 3. Внутри равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$, $\angle ABC = 100^\circ$) отмечена точка M так, что $\angle MAB = 10^\circ$, $\angle MBA = 20^\circ$. Найдите $\angle BMC$.

◀ *Ответ.* 80°. Построим на стороне BC треугольник $BM'C$, равный $\triangle BMA$, как показано на рисунке.



Тогда $\angle MBM' = 100^\circ - 20^\circ - 20^\circ = 60^\circ$ и $BM = BM'$, т. е. $\triangle MBM'$ равносторонний.

$$\angle BM'C = 180^\circ - 20^\circ - 10^\circ = 150^\circ$$
$$\angle MM'C = 360^\circ - 60^\circ - 150^\circ = 150^\circ.$$

Таким образом, $\triangle MM'C = \triangle BM'C$ (по I признаку равенства треугольников), следовательно, $MC = BC$. Получили, что $\triangle BMC$ равнобедренный, и $\angle BMC = \angle MBC = 80^\circ$. ▶

Часть III.

Задача 1. У крестьянина была коза, корова, кобыла и стог сена. Сын его подсчитал, что этого сена хватит, чтобы кормить козу и кобылу 1 месяц, или корову и козу 3/4 месяца, или же корову и кобылу 1/3 месяца. В ответ отец сказал, что сын учится очень плохо. Почему?

◀ Пусть за 1 месяц коза съедает x ед. сена, корова — y ед. и кобыла — z ед. (весь стог сена мы примем за 1 единицу). Тогда коза и кобыла вместе за 1 месяц съедят $x + z$ ед. сена, значит, стог сена они съедают за $\dfrac{1}{x+z}$ месяцев. По условию $\dfrac{1}{x+z} = 1$. Аналогично, $\dfrac{1}{x+y} = \dfrac{3}{4}$ и $\dfrac{1}{y+z} = \dfrac{1}{3}$. Получается система уравнений

$$\begin{cases} x + z = 1, \\ x + y = 4/3, \\ y + z = 3, \end{cases}$$

где x, y, z — положительные числа. Сложим первые два уравнения: $2x + y + z = 2\frac{1}{3}$; вычтя теперь отсюда третье уравнение, получим:

$2x = -\frac{2}{3}$, т. е. $x < 0$. Полученное противоречие показывает, что сын был неправ. ▶

Задача 2. Докажите, что в произведении $1!\,2!\,3!\ldots99!\,100!$ можно вычеркнуть один из сомножителей так, чтобы произведение стало точным квадратом.

◀ Заметим, что $k!\cdot(k+1) = (k+1)!$. Равенства

$$1!\cdot2!\cdot3!\cdot\ldots\cdot99!\cdot100! = (1!)^2\cdot2\cdot(3!)^2\cdot4\cdot(5!)^2\cdot6\cdot\ldots\cdot(99!)^2\cdot100 = \\ = (1!\,3!\,5!\ldots99!)^2\cdot2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot100 = (1!\,3!\,5!\ldots99!)^2\cdot2^{50}\cdot50!$$

показывают, что, вычеркнув $50!$, мы получим точный квадрат. ▶

Задача 3. Гангстеры ограбили редакцию научно-популярного журнала “Квантум”, похитив большую часть свеженапечатанных номеров, что нанесло ущерб, превышающий 2500 долларов. Седьмую часть бандиты успели распродать к моменту их поимки, а оставшиеся экземпляры были возвращены владельцу. Чтобы уменьшить потери, редакция вынуждена была продавать каждый возвращенный журнал на 60 центов дороже, но это не возместило убытки. После того, как сотрудник журнала пожертвовал 1 доллар, урон был с лихвой компенсирован. Сколько стоил 1 журнал до подорожания?

◀ Для упрощения будем все цены выражать в центах. Если обозначить через N количество украденных журналов, а через x цену одного журнала, то ущерб составит Nx. По условию

$$Nx > 250000. \qquad (1)$$

Условие, что $6/7$ украденного количества журналов, будучи проданными по цене на 60 центов большей, чем первоначальная, не компенсируют потери, запишется в виде неравенства

$$(x+60)6N/7 < Nx. \qquad (2)$$

А условие, что прибавление одного доллара компенсирует потерю, запишется в виде

$$(x+60)6N/7 + 100 > Nx. \qquad (3)$$

Из неравенства (2) получаем, что $x > 360$. Из неравенства (3) получаем

$$Nx < 360N + 700. \qquad (4)$$

Из (1) и (4)

$$250000 < 360N + 700,$$

отсюда $N \geqslant 693$. С другой стороны, из (4) получаем, что $x < 360+\dfrac{700}{N}$. Значит, $360 < x < 360 + 700/N$, но $N \geqslant 693$, поэтому единственное целое x, удовлетворяющее этому неравенству, есть $x = 361$. Теперь из четвертого неравенства получаем, что $N < 700$. Заметим, что N должно делиться на 7. Единственное число в интервале $693 \leqslant N \leqslant 699$, делящееся на 7, — это 693. Итак, было украдено 693 журнала, каждый стоимостью 3 доллара 61 цент. ►

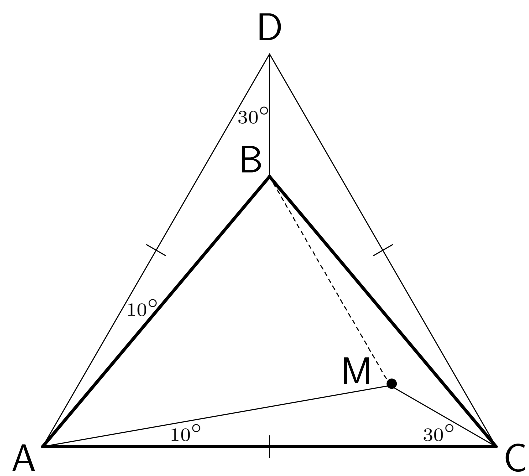
Домашнее задание

Задача 1. Вычислите $\dfrac{2{,}47374^4 - \left(4{,}94748^2 - 3{,}71061^2\right)^2}{7{,}42122^4 - \left(6{,}18435^2 - 8{,}65809^2\right)^2}$.

Указание. Обозначить $1{,}23687 = a$.

Задача 2. В $\triangle ABC$ $AB = BC$, $\angle ABC = 80°$. Внутри $\triangle ABC$ взята точка M такая, что $\angle MAC = 10°$, $\angle MCA = 30°$. Найдите $\angle AMB$.

◄ *Ответ.* 70°. $\angle BAC = (180°-80°) : 2 = 50°$. Так как $50°+10° = 60°$, строим равносторонний треугольник ADC (см. рисунок).



В треугольниках ADB и CDB сторона DB общая, $AD = CD$ и $AB = CB$, поэтому $\triangle ADB = \triangle CDB$ (по III признаку равенства треугольников). $\angle ADB = \angle CDB = 30°$; поэтому $\triangle ADB = \triangle ACM$ (по II признаку равенства треугольников), так что $AB = AM$, и треугольник ABM — равнобедренный. Имеем $\angle BAM = 50° - 10° = 40°$; $\angle AMB = (180° - 40°) : 2 = 70°$. ►

Задача 3. Даны прямые l_1, l_2, l_3. Постройте окружность так, чтобы части прямых, лежащих внутри окружности, были равны a.

◄ Докажем следующую теорему: если в окружности проведены равные хорды, то расстояния от ее центра до этих хорд равны.

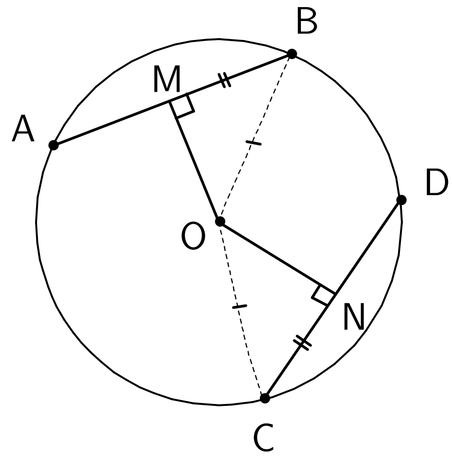
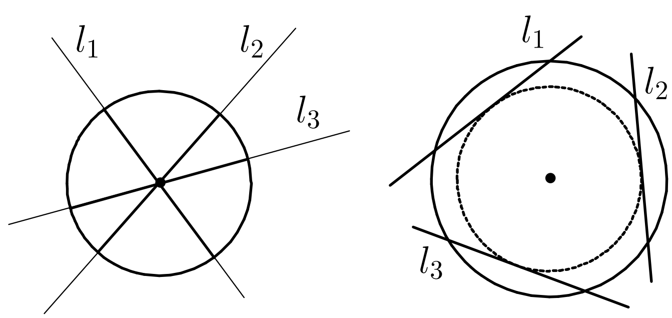


Рис. 1

Доказательство. Пусть в окружности с центром O хорды AB и CD равны a. Опустим перпендикуляры OM и ON на эти хорды соответственно (рис. 1). Тогда M и N — середины AB и CD (ведь диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам). Значит, $BM = CN = a/2$ и $OB = OC$ (как радиусы) $\Rightarrow \triangle OBM = \triangle OCN$ (по гипотенузе и катету). Поэтому $OM = ON$. Теорема доказана.

Из теоремы следует, что если искомая окружность существует, то ее центр равноудален от трех прямых l_1, l_2 и l_3. Рассмотрим три случая.

I случай. Пусть прямые l_1, l_2, l_3 попарно пересекаются. Если они пересекаются в одной точке (рис. 2, а), то искомой является окружность с центром в точке их пересечения и радиусом $a/2$. В противном случае, эти три прямые образуют треугольник, и центр искомой окружности совпадает с центром окружности, вписанной в полученный треугольник (рис. 2, б). Таким образом, строим сначала вписанную окружность и определяем ее радиус r. Затем строим прямоугольный $\triangle OBM$ с катетами $OM = r$ и $MB = a/2$ (рис. 1); так мы найдем радиус искомой окружности, равный OB.



(а) (б)

Рис. 2

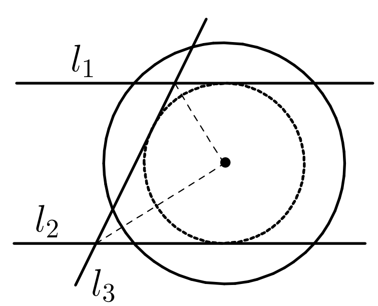


Рис. 3

II случай. Пусть две прямые параллельны (скажем, $l_1 \parallel l_2$), а третья пересекает их (рис. 3). Тогда центр искомой окружности лежит на пересечении биссектрис углов, образованных прямыми l_1 и l_3 и прямыми l_2 и l_3.

III случай. Пусть все три прямые параллельны. В этом случае расстояния от любой точки плоскости до этих трех прямых не могут быть все равными. Значит, такую окружность построить нельзя. ▶

Задача 4. Записан первый миллиард натуральных чисел. Какая цифра используется больше остальных?

◀ *Ответ.* Цифра 1. Рассмотрим числа от 1 до 999 999 999. Каждая из цифр от 1 до 9 встречается среди этих чисел одинаковое число раз, ведь цифры от 1 до 9 появляются одинаковое число раз в разряде единиц, в разряде десятков, сотен и т. д. Однако цифра 0 встречается реже ввиду того, что нуль не может являться первой цифрой натурального числа.

Когда мы записываем последнее число 1 000 000 000, у нас добавляются еще одна единица и девять нулей. Так что теперь цифра 1 встречается на один раз больше каждой из цифр от 2 до 9, а вот нулей остается по-прежнему меньше. ▶

Задача 5. Алеша вышел из поселка Алешино в 10 ч 18 мин и пришел в Борисово в 13 ч 30 мин. В тот же день Борис вышел из Борисова в 9^{00} и, идя той же дорогой, пришел в Алешино в 11 ч 40 мин. Дорогу пересекает широкая река с мостом. Алеша и Борис подошли к ней одновременно, но с разных сторон. Алеша ушел с моста на 1 минуту позже Бориса. Когда они подошли к мосту?

◀ *Ответ.* В 11 часов. Алеша затратил на весь путь между поселками 3 ч 12 мин = 192 мин, а Борис — 2 ч 40 мин = 160 мин. Значит, Борис шел в $192/160 = 1{,}2$ раза быстрее Алеши. Пусть Борис проходит длину моста за x мин, тогда Алеша — в 1,2 раза дольше, т. е. за $1{,}2x$ мин. Получаем уравнение $1{,}2x - x = 1$, откуда $x = 5$ (мин). Значит, Алеша проходит мост за $x + 1 = 6$ (мин).

Пусть Борис шел до моста y мин. Поскольку Алеша вышел из своего поселка на 1 ч 18 мин = 78 мин позже, то он шел до моста $(y-78)$ мин (ведь ребята подошли к мосту одновременно). Подсчитаем время, которое затрачивает Алеша на весь путь. Его движение состоит из трех "кусков": (I) путь от поселка Алешино до начала моста — $(y-78)$ мин; (II) переход реки по мосту — 6 мин; (III) путь от конца моста до поселка Борисово — $1{,}2y$ мин (ведь это расстояние Борис прошел за y мин). Итого, $(y - 78) + 6 + 1{,}2y = 2{,}2y - 72$ (мин). Составляем уравнение

$$2{,}2y - 72 = 192, \text{ откуда } y = 120.$$

Итак, Борис шел до моста 120 мин = 2 часа, т. е. к мосту он подошел в 11 часов (и Алеша тоже). ►

Занятие 7

Часть I. **Тема: “Разберем все варианты”.**

> “Метод тут примерно такой, как при поисках одной горошины в мешке гороха: прежде всего необходимо терпение, молодой человек”.
>
> *К. Чапек. “Купон”*

Задача 1. На складе стоят 5 станков массой 1500 кг, 1020 кг, 800 кг, 750 кг, 600 кг. Требуется увезти часть из них на машине грузоподъемностью 3 тонны, загрузив ее максимально, но не перегрузив. Какие станки надо погрузить на машину?

◄ Предположим, что мы решили не брать самый тяжелый станок. Тогда масса остальных станков $1020 + 800 + 750 + 600 = 3170$ кг, что больше трех тонн. Значит, придется оставить еще какой-нибудь станок. Мы захватим самый большой вес, если оставим самый легкий станок — в 600 кг. Надо, конечно, еще проверить, сможет ли трехтонка увезти оставшиеся станки: $1020 + 800 + 750 = 2570$ кг < 3 т. Итак: если не брать самый тяжелый станок, то мы увезем, самое большее, 2570 кг.

Пусть теперь мы погрузили на машину станок в 1500 кг; тогда в машине еще остается места на 1500 кг. Уложиться в эти 1500 кг можно, взяв только один станок, что даст нам, самое большее, 1020 кг (а всего в грузовике будет 2520 кг), либо взять два станка, что даст, самое большее, $800+600 = 1400$ кг, а всего на грузовике будет 2900 кг.

Сравнивая все варианты, мы видим, что последний — наилучший. Итак, надо погрузить станки массой 1500 кг, 800 кг, 600 кг. ►

Задача 2. Найдите все натуральные трехзначные числа, каждое из которых обладает двумя свойствами:

– первая цифра в 3 раза меньше последней цифры;

– сумма самого числа с числом, получающимся из него перестановкой второй и третьей цифр, делится без остатка на 8.

◄ Пусть x — цифра сотен, y — цифра десятков искомого числа. Тогда цифра его единиц равна $3x$. Очевидно, $3x \leqslant 9$, откуда $x \leqslant 3$. Нулем первая цифра числа быть не может. Значит, x не может равняться ничему иному, кроме 1, 2 и 3. Эти три возможности мы рассмотрим по отдельности, но сначала запишем второе условие:

$$(100x + 10y + 3x) + (100x + 30x + y) \,\vdots\, 8,$$

т. е.
$$200x + 33x + 11y \mathrel{\vdots} 8.$$
Мы нарочно оставили $200x$ и $33x$ отдельными слагаемыми. Так легче заметить, что $200x$ можно отбросить (так как $200 \mathrel{\vdots} 8$) и записать это условие так:
$$33x + 11y \mathrel{\vdots} 8,$$
или
$$11(3x + y) \mathrel{\vdots} 8.$$
Для этого необходимо и достаточно, чтобы $3x+y$ делилось на 8. Теперь приступим к перебору, который вполне осуществим, так как состоит всего из трех случаев.

1) $x = 1$. Тогда $3 + y \mathrel{\vdots} 8$. Это будет при $y = 5$.

2) $x = 2$. Тогда $6 + y \mathrel{\vdots} 8$. Это будет при $y = 2$.

3) $x = 3$. Тогда $9 + y \mathrel{\vdots} 8$. Это будет при $y = 7$.

Итак, задача имеет три ответа: 153, 226, 379. ►

Задача 3. Решите в натуральных числах систему
$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1, \\ x \leqslant y \leqslant z. \end{cases}$$

◄ *Ответ.* $(2,3,6)$, $(2,4,4)$, $(3,3,3)$. Очевидно,
$$\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{z}.$$
Предположим сначала, что $x > 3$. Тогда
$$\frac{1}{3} > \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{z},$$
откуда
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3},$$
что противоречит условию. Итак, x не может равняться ничему иному, кроме 1, 2 и 3. Начнем перебор.

1) $x = 1$. Тогда
$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0,$$
чего не может быть.

2) $x = 2$. Тогда
$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}.$$
Если $y > 4$, то
$$\frac{1}{4} > \frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{z},$$
откуда
$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4},$$
чего не может быть. Итак, y может равняться только 2, 3 или 4. Подставляя каждое из этих значений, убеждаемся, что $y = 2$ не годится, а два других значения дают два ответа: $(2, 3, 6)$ и $(2, 4, 4)$.

3) $x = 3$. Тогда
$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}.$$
Если $y > 3$, то
$$\frac{1}{3} > \frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{z},$$
откуда
$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3},$$
чего не может быть. Итак, в данном случае надо рассмотреть для y только одно значение 3 (помните, что $x \leqslant y \leqslant z$), что дает еще один ответ: $(3, 3, 3)$.

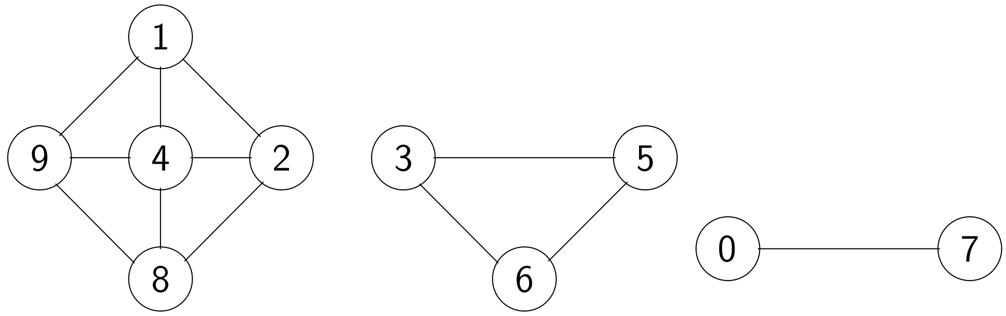
Все случаи разобраны. Задача решена. ►

Задача 4. Можно ли выписать по кругу k различных цифр так, чтобы из каждых двух соседних можно было составить число, делящееся на 7? ($3 \leqslant k \leqslant 10$, k — целое.)

◄ Фактически здесь предлагается восемь различных задач для восьми различных значений k. Но решать их удобно вместе при помощи следующего приема.

$$\boxed{14\ 21\ 28\ 35\ 42\ 49\ 56\ 63\ 70\ 77\ 84\ 91\ 98}$$

Выпишем все двузначные числа, делящиеся на 7. Затем нарисуем на бумаге все десять цифр и соединим линиями те из них, которые составляют какое-нибудь из написанных чисел (см. рисунок). Расставить требуемым образом k цифр — все равно, что обойти k различных кружков и вернуться в начало пути.



Как видите, все цифры распались на три “островка”. Теперь ясно, что больше пяти цифр расставить требуемым образом нельзя. А три, четыре или пять цифр расставить можно. Запишите требуемые расстановки самостоятельно. ►

<u>Часть II.</u> В помощь уроку.

Задача 1. Постройте равнобедренный треугольник по данному периметру и высоте к основанию.

◄ См. решение задачи 3 на стр. 47. ►

Задача 2. При каком значении a выражение $4a^2 - 20a + 26$ имеет наименьшее значение?

◄ $4a^2 - 20a + 26 = (4a^2 - 2 \cdot 2a \cdot 5 + 5^2) + 1 = (2a-5)^2 + 1$. Поскольку квадрат — число неотрицательное, то данное выражение не меньше единицы. Наименьшее значение, равное 1, достигается, когда $2a - 5 = 0$, т. е. при $a = 5/2$. ►

Задача 3. Разложите на множители $a^3 + a^2 - 5a + 3$.

◄ Один корень этого многочлена легко угадывается — это $a = 1$, значит, многочлен делится на $a - 1$. Проведем деление “уголком”:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
a^3 & +\,a^2 & -\,5a & +\,3 & a-1 \\ \cline{5-5}
a^3 & -\,a^2 & & & a^2+2a-3 \\ \cline{1-2}
 & 2a^2 & -\,5a & & \\
 & 2a^2 & -\,2a & & \\ \cline{2-3}
 & & -\,3a & +\,3 & \\
 & & -\,3a & +\,3 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Исходный многочлен разложился на множители $(a-1)(a^2+2a-3)$. Попытаемся дальше разложить квадратный трехчлен, стоящий во второй скобке. Значение $a = 1$ тоже является его корнем, поэтому его можно поделить на $a-1$.

$$\begin{array}{l|l} a^2+2a-3 & a-1 \\ \cline{2-2} \underline{a^2-a} & a+3 \\ 3a-3 & \\ \underline{3a-3} & \\ 0 & \end{array}$$

Таким образом, разложение исходного многочлена на множители таково: $(a-1)(a-1)(a+3) = (a-1)^2(a+3)$. ►

Задача 4. Сократите дробь $\dfrac{x^4-3x^2+1}{(3x^2+3x-3)^2}$.

$$◄ \quad \frac{x^4-3x^2+1}{(3x^2+3x-3)^2} = \frac{(x^4-2x^2+1)-x^2}{9(x^2+x-1)^2} = \frac{(x^2-1)^2-x^2}{9(x^2+x-1)^2} =$$
$$= \frac{(x^2-x-1)(x^2+x-1)}{9(x^2+x-1)^2} = \frac{x^2-x-1}{9(x^2+x-1)}$$

после сокращения на x^2+x-1. ►

Задача 5. На доске написаны натуральные числа от 1 до 20. Одно из них стерли, и оказалось, что среди оставшихся есть число, равное среднему арифметическому этих чисел. Какое число стерли?

◄ Подсчитаем сумму $1+2+3+\ldots+19+20$. Разобьем числа на пары: первое и последнее, второе и предпоследнее, третье и третье с конца и т. д. Сумма чисел в каждой такой паре равна 21, а всего пар 10, следовательно, сумма всех чисел равна $20 \cdot 10 = 210$.

Пусть стерли число k. Сумма оставшихся 19 чисел стала равна $210-k$, а их среднее арифметическое $\dfrac{210-k}{19}$. По условию это число равно одному из оставшихся на доске чисел, т. е. во-первых, оно целое и, во-вторых, лежит в пределах от 1 до 20. Имеем

$$\frac{210-k}{19} = 11 - \frac{k-1}{19},$$

так что $k-1 \,\vdots\, 19$. Поскольку k — одно из чисел от 1 до 20, то $k=1$ или $k=20$. В первом случае среднее арифметическое оставшихся чисел равно 11, во втором — 10.

Итак, задача имеет два ответа: с доски было стерто либо число 1, либо число 20. ►

Домашнее задание

Задача 1. Найдите все трехзначные числа, каждое из которых в 19 раз больше суммы своих цифр.

◀ *Ответ.* 114, 133, 152, 171, 190, 209, 228, 247, 266, 285, 399. Обозначим данное трехзначное число через $\overline{abc}$. Условие задачи можно записать так:

$$\begin{aligned} \overline{abc} &= 19 \cdot (a+b+c), \\ 100a + 10b + c &= 19a + 19b + 19c, \\ 81a &= 9b + 18c, \qquad \text{(сократим на 9)} \\ 9a &= b + 2c. \end{aligned}$$

Поскольку цифры b и c не больше 9, то $9a = b + 2c \leqslant 9 + 2 \cdot 9 = 27$, т. е. $a \leqslant 3$. Первая цифра a отлична от 0, поэтому a равно 1, 2 или 3. Рассмотрим три случая.

1) $a = 1$. Тогда $b + 2c = 9$, цифра b должна быть нечетной:

$$\begin{aligned} b &= 1, \quad c = 4, \\ b &= 3, \quad c = 3, \\ b &= 5, \quad c = 2, \\ b &= 7, \quad c = 1, \\ b &= 9, \quad c = 0. \end{aligned}$$

Получаем пять чисел: 114, 133, 152, 171, 190.

2) $a = 2$. Тогда $b + 2c = 18$, цифра b должна быть четной:

$$\begin{aligned} b &= 0, \quad c = 9, \\ b &= 2, \quad c = 8, \\ b &= 4, \quad c = 7, \\ b &= 6, \quad c = 6, \\ b &= 8, \quad c = 5. \end{aligned}$$

Получаем еще пять чисел: 209, 228, 247, 266, 285.

3) $a = 3$. Тогда $b + 2c = 27$. Ясно, что это возможно только при $b = c = 9$. Получаем еще одно число: 399. ▶

Задача 2. Решите в целых положительных числах уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 20.$$

◀ *Ответ.* $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$, $(3,2,1)$, $(2,2,2)$. Если из чисел x, y, z какое-то $\geqslant 5$, то его квадрат $\geqslant 25$, и левая часть уравнения уже получается больше 20. Значит, каждое из чисел x, y, z не превосходит 4. Более того, покажем также, что ни одно из них не может равняться 4. Если, например, $x = 4$, то получается уравнение

$y^2 + z^2 + 4yz = 4$, в котором в левой части два первых слагаемых не меньше 1, третье не меньше 4, т. е. сумма не меньше 6, а она должна равняться четырем.

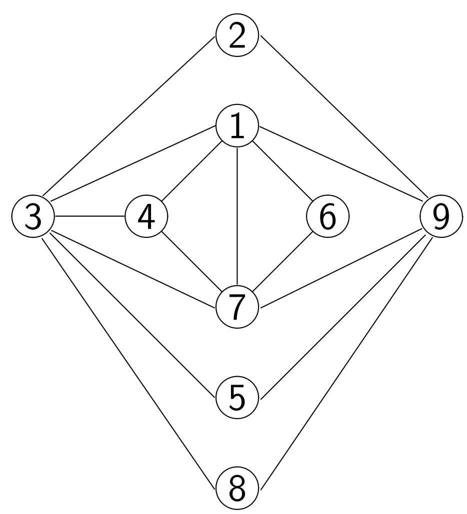
Итак, $x \leqslant 3$, $y \leqslant 3$, $z \leqslant 3$. Чтобы уменьшить перебор, рассмотрим сначала случай, когда одно из этих чисел равно 2. Скажем, пусть $x = 2$. Имеем уравнение $y^2 + z^2 + 2yz = 16$, $(y + z)^2 = 16$, и поскольку $y + z$ — натуральное число, то $y + z = 4$. Отсюда три возможности: либо $y = 1$, $z = 3$, либо $y = z = 2$, либо $y = 3$, $z = 1$. Ввиду того, что переменные x, y, z входят в уравнение симметрично, все тройки чисел, указанные в ответе, являются его решениями.

Других решений нет. Действительно, мы рассмотрели случай, когда одно из чисел x, y, z равно 2, осталось рассмотреть случай, когда ни одно из этих чисел не равно 2, т. е. равно либо 1, либо 3. Среди чисел x, y, z не может быть больше одного числа, равного 3 (в противном случае, левая часть исходного уравнения не меньше 28). Значит, среди этих чисел либо вообще нет равных трем, т. е. $x = y = z = 1$, либо только одно равно трем, а два других равны единице. Ни тот, ни другой вариант не подходит. ►

Задача 3. Можно ли расположить цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по кругу так, чтобы из каждых двух соседних цифр можно было составить простое двузначное число?

◄ Выпишем все двузначные простые числа:

11, 13, 17, 19, 23, 29, 31,
37, 41, 43, 47, 53, 59, 61,
67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.



Теперь нарисуем на бумаге цифры от 1 до 9 и соединим те из них, из которых можно составить простое двузначное число. Получится диаграмма, показанная на рисунке справа.

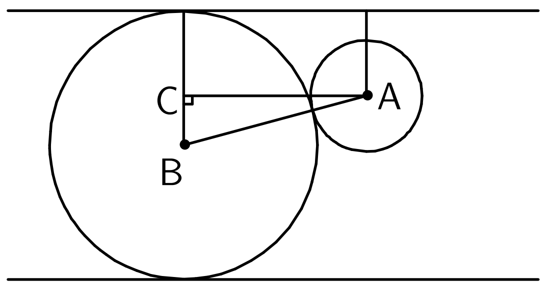
Мы видим, что рядом с цифрой 2 могут стоять только цифры 3 или 9, значит, двойка стоит между тройкой и девяткой. То же самое можно сказать про цифры 5 и 8: рядом с ними могут стоять только цифры 3 и 9, но тройка и девятка уже стоят рядом с двойкой, они “заняты”. Следовательно, указанным образом нельзя расставить по кругу все цифры от 1 до 9. ►

Задача 4. При каком значении x выражение $4x^2 - 12x + 14$ достигает наименьшее значение?

◀ $4x^2-12x+14=(4x^2-12x+9)+5=(2x-3)^2+5\geqslant 5$. Наименьшее значение достигается, когда $2x-3=0$, т. е. при $x=3/2$. ▶

Задача 5. Даны две параллельные прямые и между ними окружность. Постройте окружность, касающуюся данных параллельных прямых и данной окружности.

◀ Пусть данная окружность имеем центр A и радиус r, и точка A удалена на расстояние a от ближайшей прямой. Радиус искомой окружности известен — это половина расстояния между параллельными прямыми. (Обозначим этот радиус R.) Значит, нужно найти только положение ее центра — точки B (см. рисунок).



Построение следующее. Строим прямоугольный $\triangle ABC$ по катету $BC=R-a$ и гипотенузе $AB=R+r$. Второй катет AC даст нам расстояние между проекциями центров A и B на данные прямые. ▶

Занятие 8

<u>**Часть I.**</u> **Разминка.**

Задача 1. Какое из чисел $(a+1)^3$, a^2+1, a^{100} всегда больше 1?

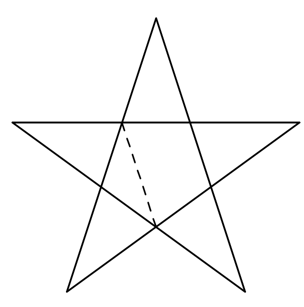
Задача 2. Какое число больше 2^{121}, 7^{44}, 9^{33}?

◀ Данные числа равны $\left(2^{11}\right)^{11}$, $\left(7^4\right)^{11}$, $\left(9^3\right)^{11}$, так что достаточно сравнить числа 2^{11}, 7^4 и 9^3. Имеем

$$2^{11}=2048, \quad 7^4=2401, \quad 9^3=729,$$

поэтому второе число самое большое. ▶

Задача 3. Докажите, что светлая и темная части фигуры равны по площади.



Задача 4. У каждого марсианина 3 руки. Могут ли взяться за руки 7 марсиан?

◀ *Ответ.* Нет, не могут. См. решение задачи 1 на стр. 66. ▶

Часть II. В помощь уроку.

Задача 1. Сократите дробь $\dfrac{x^5-1}{x-1}$.

◀ *Ответ.* $x^4+x^3+x^2+x+1$ после сокращения на $x-1$. ▶

Задача 2. Докажите, что если $a^2+9ab+b^2 \vdots 11$, то $a^2-b^2 \vdots 11$.

◀ См. решение задачи 4 на стр. 59. ▶

Задача 3. Докажите: если два натуральных числа можно представить в виде суммы двух квадратов, то их произведение также можно представить в виде суммы двух квадратов.

◀ Пусть $M=a^2+b^2$, $N=x^2+y^2$. Тогда произведение этих чисел

$$\begin{gathered}M\cdot N=(a^2+b^2)(x^2+y^2)=\underline{a^2x^2}+a^2y^2+b^2x^2+\underline{b^2y^2}=\\=(a^2x^2+2ax\cdot by+b^2y^2)+(a^2y^2-2ay\cdot bx+b^2x^2)=\\=(ax+by)^2+(ay-bx)^2\end{gathered}$$

также представляется в виде суммы двух квадратов, что и требовалось доказать. ▶

Задача 4. Разложите на множители

$$x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz.$$

◀ Раскроем скобки во втором и третьем слагаемых и приведем подобные, тогда член $4xyz$ сократится. Имеем

$$\begin{aligned}&x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz=\\&=x(y+z)^2+\underline{yz^2}+x^2y+x^2z+\underline{y^2z}=\\&=x(y+z)^2+yz(y+z)+x^2(y+z)=\\&=(y+z)\big(x(y+z)+yz+x^2\big)=\\&=(y+z)(\underline{xy}+xz+\underline{yz}+x^2)=\\&=(y+z)\big(y(x+z)+x(z+x)\big)=(y+z)(x+z)(x+y).\end{aligned}$$ ▶

Задача 5. Верно ли, что если стороны треугольника связаны соотношением $\dfrac{a-b}{c}+\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}=0$, то он равносторонний? равнобедренный?

◀ Приведем дроби в левой части равенства к общему знаменателю:

$$\frac{ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)}{abc}=0.$$

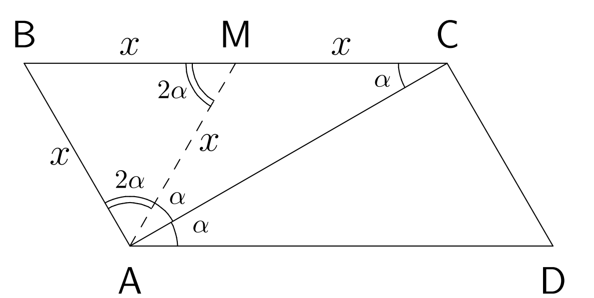
Знаменатель abc, отличный от нуля, можно отбросить, а числитель преобразуем так:

$$\begin{aligned}
&ab(a-b)+\underline{b^2c}-bc^2+c^2a-\underline{ca^2}=\\
&=ab(a-b)+c(b^2-a^2)+c^2(a-b)=\\
&=ab(a-b)-c(a+b)(a-b)+c^2(a-b)=\\
&=(a-b)\big(ab-c(a+b)+c^2\big)=\\
&=(a-b)\big(a(b-c)-c(b-c)\big)=(a-b)(b-c)(a-c).
\end{aligned}$$

Получаем, что $(a-b)(b-c)(c-a)=0$. Отсюда либо $a=b$, либо $b=c$, либо $c=a$, т. е. треугольник обязательно является равнобедренным. Однако равносторонним он быть не обязан: можно взять, например, $a=b\neq c$. ▶

Задача 6. Диагональ параллелограмма делит угол в отношении $1:3$. Одна сторона параллелограмма в 2 раза больше другой. Найдите его углы.

◀ *Ответ.* 120° и 60°. Пусть в параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC и $\angle CAD=\alpha$, $\angle BAC=3\alpha$. Тогда $\angle BCA=\angle CAD=\alpha$ (как накрест лежащие). Выясним, какая из сторон AB или BC в 2 раза больше другой. В $\triangle ABC$ сторона BC лежит против угла 3α, а сторона AB против угла α. Поскольку против бо́льшего угла лежит бо́льшая сторона, то $BC=2AB$. Обозначим $AB=x$, $BC=2x$.



Проведем в $\triangle ABC$ отрезок AM такой, что $\angle MAC=\alpha$. Имеем $\angle BMA=\angle MAC+\angle MCA=2\alpha$ (как внешний в $\triangle AMC$). Значит, треугольники ABM и AMC равнобедренные, отсюда находим: $BM=AB=x$, $MC=BC-BM=2x-x=x\Rightarrow AM=MC=x$. Получаем, что в $\triangle ABM$ все три стороны равны x, т. е. он правильный, и все его углы равны 60°. Итак, $2\alpha=60^\circ$ и $\alpha=30^\circ$. Теперь окончательно находим углы параллелограмма $\angle A=4\alpha=120^\circ$, $\angle B=60^\circ$. ▶

Часть III. **К олимпиаде.**

Задача 1. Все точки окружности окрашены в 2 цвета. Докажите, что существует равнобедренный вписанный треугольник, вершины которого окрашены в один цвет.

◀ Рассмотрим правильный пятиугольник, вписанный в данную окружность. Из пяти его вершин по принципу Дирихле найдутся три, окрашенные в один цвет. (Действительно, если вершин каждого цвета было бы не более двух, то всего вершин не более четырех, а их у нас пять.) Пусть это будут точки A, B и C.

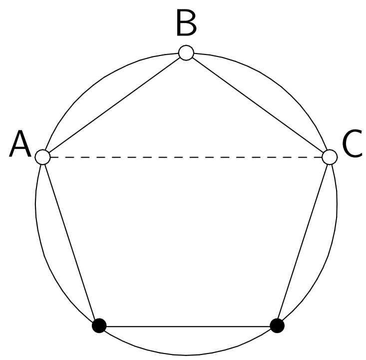


Рис. 1

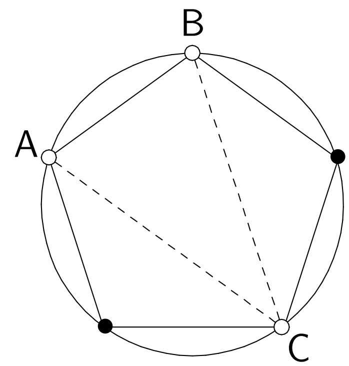


Рис. 2

Если A, B, C — последовательные вершины пятиугольника (рис. 1), то $\triangle ABC$ — равнобедренный, так как $AB = BC$.

Если точки A, B, C не являются последовательными вершинами, скажем, вершина C отделена от A и B точками другого цвета (рис. 2), то $\triangle ACB$ — равнобедренный, так как $AC = BC$.

Итак, в обоих случаях треугольник с вершинами в точках A, B и C является равнобедренным, а значит, искомым. ▶

Задача 2. Можно ли выпуклый 17-угольник разрезать на 14 треугольников?

◀ Пусть нам удалось разрезать 17-угольник на 14 треугольников. Заметим, что сумма углов во всех этих 14 треугольниках не меньше суммы углов 17-угольника. В самом деле, сумма углов во всех 14 треугольниках складывается из всех углов 17-угольника и еще нескольких углов треугольников при тех вершинах, которые лежат внутри 17-угольника (если такие имеются).

Сумма углов 17-угольника равна $S_{17} = 180^\circ \cdot (17 - 2) = 15 \cdot 180^\circ$, а сумма углов 14 треугольников равна $14S_3 = 14 \cdot 180^\circ$. Итак, $14S_3 < S_{17}$, а выше мы показали, что должно быть выполнено обратное: $14S_3 \geqslant S_{17}$. Противоречие. Следовательно, такое разрезание невозможно.

Попробуйте доказать самостоятельно, что любой 17-угольник (не обязательно выпуклый) можно разрезать на любое количество k треугольников, если $k \geqslant 15$. ►

Замечание. Из условия задачи можно выкинуть слово "выпуклый", поскольку формула $S_n = 180°(n-2)$ суммы углов n-угольника верна не только для выпуклых многоугольников, но также и для невыпуклых.

Задача 3. Три мужа — Андрей, Иван и Степан пошли со своими женами Анной, Катей и Ольгой за покупками вещей. Каждый из этих шести лиц уплатил за каждую купленную вещь столько рублей, сколько вещей купил. Андрей купил на 23 вещи больше Анны, Иван больше Кати на 11 вещей, Степан меньше Ольги на 23 вещи. Каждый из мужчин израсходовал на 63 р. больше жены. Кто на ком женат?

◄ *Ответ.* Супружеские пары — Андрей и Ольга, Иван и Анна, Степан и Катя. Если муж купил x вещей, а его жена y вещей, то $x^2 - y^2 = 63$, т. е. $(x-y)(x+y) = 1 \cdot 63 = 3 \cdot 21 = 7 \cdot 9$. Отсюда возможны только три варианта: либо $x = 32$, $y = 31$, либо $x = 12$, $y = 9$, либо $x = 8$, $y = 1$. Значит, мужья купили 32, 12 или 8 вещей, а жены 31, 9 или 1 вещь. Теперь из условия нетрудно определить, кто сколько вещей купил. ►

Задача 4. Решите в целых числах уравнение $x + y = xy$.

◄ *Ответ.* $(0,0)$ и $(2,2)$. Запишем уравнение таким образом:

$$xy - x - y + 1 = 1, \text{ или } (x-1)(y-1) = 1.$$

Получили, что произведение двух целых чисел равно 1. Это возможно только в двух случаях:

$$(\mathbf{I}) \begin{cases} x - 1 = 1, \\ y - 1 = 1; \end{cases} \qquad (\mathbf{II}) \begin{cases} x - 1 = -1, \\ y - 1 = -1. \end{cases}$$

В первом случае находим $x = y = 2$, во втором — $x = y = 0$. ►

Домашнее задание

Задача 1. Докажите, что если $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = (a+b-2c)^2 + (b+c-2a)^2 + (c+a-2b)^2$, то $a = b = c$.

◄ После раскрытия всех скобок и приведения подобных слагаемых получаем равенство:

$$4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab - 4bc - 4ac = 0.$$

Разделим его на 2 (далее будет понятно, почему не на 4) и сгруппируем слагаемые:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = 0,$$
$$(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (a^2 - 2ac + c^2) = 0,$$
$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 = 0.$$

Сумма трех квадратов равна нулю тогда и только тогда, когда каждый из них равен нулю, т. е. $a = b$, $b = c$ и $a = c \Rightarrow a = b = c$. ►

Задача 2. Найдите наибольшее значение выражения

$$4b(5a - b) - (5a - 2)(5a + 2).$$

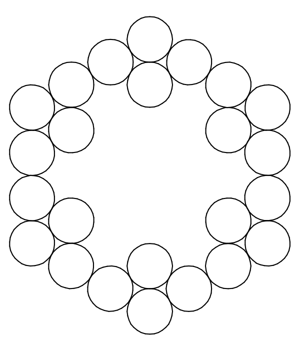
◄ *Ответ.* 4. Раскроем скобки в данном выражении:

$$4b(5a - b) - (5a - 2)(5a + 2) = 20ab - 4b^2 - 25a^2 + 4 =$$
$$= 4 - (25a^2 - 20ab + 4b^2) = 4 - (5a - 2b)^2.$$

Поскольку из числа 4 вычитается квадрат (число неотрицательное), то данное выражение не превосходит 4. Наибольшее значение, равное 4, достигается если $5a = 2b$, например, при $a = b = 0$. ►

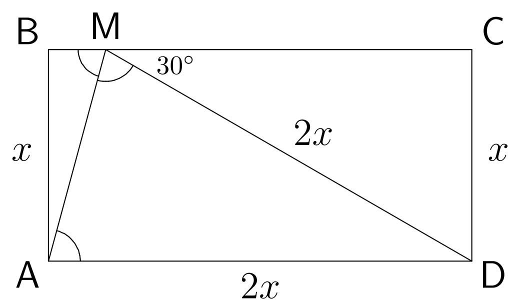
Задача 3. Имеется мешок одинаковых круглых монет. Можно ли 24 монеты разложить так, чтобы каждая касалась трех других?

◄ *Ответ.* Можно. Расположение монет, удовлетворяющее условию, показано ниже на рисунке. ►



Задача 4. В прямоугольнике $ABCD$ точка $M \in BC$; $AD = 2AB$. Найдите $\angle AMB$, если $\angle AMB = \angle AMD$.

◄ *Ответ.* 75°. Обозначим $AB = x$, $AD = 2x$. Имеем $\angle MAD = \angle AMB$ (как накрест лежащие), поэтому треугольник ADM равнобедренный (в нем $\angle MAD = \angle AMD$), так что $MD = AD = 2x$. Поскольку $ABCD$ — прямоугольник, то $CD = AB = x$.



В прямоугольном треугольнике MCD гипотенуза MD в два раза больше катета CD, следовательно, $\angle CMD = 30°$. Тогда $\angle AMB = \angle AMD = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$. ►

Задача 5. От двух кусков сплава с различным содержанием свинца массой 6 кг и 12 кг отрезали по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавили с остатком другого сплава, после чего процентное содержание свинца в обоих сплавах стало одинаковым. Каковы массы отрезанных кусков?

◄ Пусть процентное содержание свинца в первом сплаве (массой 6 кг) равно $x\%$, а во втором сплаве (массой 12 кг) — $y\%$, и пусть отрезали куски массой m кг каждый. Рассмотрим первый сплав. Свинца в нем вначале было $\dfrac{x}{100} \cdot 6$ кг. От него отрезали кусок, в котором содержалось $\dfrac{x}{100} \cdot m$ кг свинца, и "припаяли" кусок другого сплава, в котором содержалось $\dfrac{y}{100} \cdot m$ кг свинца. В итоге получился сплав с содержанием свинца массой $\dfrac{x}{100} \cdot 6 - \dfrac{x}{100} \cdot m + \dfrac{y}{100} \cdot m$ кг. Тогда процентное содержание свинца в этом сплаве стало равно (в процентах)

$$\frac{\dfrac{x}{100} \cdot 6 - \dfrac{x}{100} \cdot m + \dfrac{y}{100} \cdot m}{6} \cdot 100 = \frac{6x - mx + my}{6}.$$

Точно так же находим, что процентное содержание свинца во втором сплаве стало равно (в процентах)

$$\frac{12y - my + mx}{12}.$$

Получается уравнение

$$\frac{6x - mx + my}{6} = \frac{12y - my + mx}{12}.$$

Умножим его на 12 и преобразуем к виду

$$12(x - y) = 3m(x - y).$$

Поскольку по условию $x \neq y$, мы можем сократить обе части уравнения на $x - y$, и тогда получится $m = 4$. Итак, от сплавов отрезали по куску массой 4 кг. ►